где ω — указанный выше функционал, а A — действующий в пространстве Y конечномерный оператор, построенный так, чтобы выполнялись равенства

$$N''(u_0)\,h_j^2 = 0, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Нетрудно составить аналогичные алгоритмы, где наряду со второй появляются другие старшие производные, но, по-видимому, для расширения зоны сходимости необходимо конструирование оператора N, содержащего значения $M(u + v_k)$, $k = 1, \ldots, m$, где v_k — заданные элементы, лежащие в окрестности точки $0 \in X$. Например:

$$N(u) = \sum_{k=1}^{m} c_k M(u + v_k) \quad (c_k = \text{const}). \tag{16}$$

3. Алгоритмы, не требующие решения линейного уравнения. В основе указанного ниже алгоритма лежит идея наискорейшего спуска, поэтому он может привести как к решению u^* уравнения (10), так и к точке локального экстремума оператора $\| M \|^2$. Можно попытаться избежать последнего случая переходом к оператору вида (16). Алгоритм целесообразно использовать, когда построение обратного оператора $[M'(u_n)]^{-1}$ трудоемко либо невозможно.

Алгоритм. Пусть X и Y — пространства Гильберта, а u_n — приближение к решению нелинейного уравнения (10). Строим линейный оператор — производную Фреше $M'(u_n)$, а также сопряженный линейный оператор $M'^*(u_n)$. Находим постоянную γ_n приближенно из нелинейного условия

$$\| M[u_n - \gamma_n M'^*(u_n) M(u_n)] \| = \min. \tag{17}$$

Следующее приближение к решению определим по формуле

$$u_{n+1} = u_n - \gamma_n M'^*(u_n) M(u_n). \tag{18}$$

В случае, когда u_n лежит достаточно близко к точному решению u^*, для определения постоянных γ_n известна формула [4]

$$\gamma_n = \| M'^*(u_n) M(u_n) \|^{-2} \| M(u_n) \|^2.$$

Если числа $\| M'^*(u_n) M(u_n) \|$ слишком малы, то можно использовать алгоритм

$$u_{n+1} = u_n - \frac{\| h_n \|^2 h_n}{(M''(u_n)\, h_n^2,\ M(u_n)) + \| M'(u_n)\, h_n \|^2}, \quad h_n = M'^*(u_n) M(u_n).$$

Эффективность последних алгоритмов можно повысить, применяя их к уравнению (12), где выбор оператора N основан на соображениях, аналогичных изложенным выше.

1. *Воеводин А. Ф., Шугрин С. М.* Численные методы расчета одномерных систем.— Новосибирск : Наука, 1981.— 208 с.
2. *Гахов Ф. Д., Черский Ю. И.* Уравнения типа свертки.— М. : Наука, 1978.— 295 с.
3. *Калиткин Н. Н.* Численные методы.— М. : Наука, 1978.— 512 с.
4. *Красносельский М. А. Вайникко Г. М., Забрейко П. П. и др.* Приближенное решение операторных уравнений.—М. : Наука, 1969.— 456 с.
5. *Ляшко И. И., Макаров В. Л., Скоробогатько А. А.* Методы вычислений.— Киев : Вища шк., 1977.— 406 с.

Ин-т прикл. пробл. механики и математики АН УССР, Львов

Получено 11.01.83

УДК 517.43+513.88

А. И. Балинский

ДВУПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ ВАРИАНТ КВАДРАТИЧНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

Спектральная теория оператор-функций, в частности операторных пучков, имеет своим источником классический анализ. Самые разнообразные спектральные задачи для оператор-функций, включая многопараметрические, возникают при решении краевых задач для уравнений в частных производных методом разделения переменных. Этим в значительной мере объясняется постоянный интерес исследователей к различным вопросам такой обобщенной спектральной теории. В данной работе описаны два способа исследования квадратичной спектральной задачи, проведена их сравнительная характеристика, установлена эквивалентность используемых в обоих способах дополнительных предположений.

Рассмотрим операторный пучок $L(\lambda) = A_0 + \lambda A_1 + \lambda^2 A_2$ с коэффициентами $A_i = A_i^*$ из множества $[H]$ всех линейных ограниченных операторов, действующих в гильбертовом пространстве H, причем $A_2^{-1} \in [H]$. Множество $\rho(L)$ всех точек комплексной плоскости $\mathbb{C}$, для которых $[L(\lambda)]^{-1} \in [H]$, называется резольвентным множеством пучка, а множество $\sigma(L) = \mathbb{C} \setminus \rho(L)$ — его спектром.

Линеаризуем пучок L. Для этого образуем пространство $\tilde{H} = H \oplus H$ со скалярным произведением $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (x_1, y_1) + (x_2, y_2)$, $\tilde{x} = \langle x_1, x_2 \rangle$, $\tilde{y} = \langle y_1, y_2 \rangle \in \tilde{H}$ и введем в нем оператор $\tilde{L} : \tilde{L}\tilde{x} = \tilde{y}$, $y_1 = x_2$, $y_2 = -A_2^{-1}(A_0 x_1 + A_1 x_2)$. Между спектрами пучка L и оператора $\tilde{L}$ справедливо такое соотношение.

Лемма 1. $\sigma(L) = \sigma(\tilde{L})$.

Справедливость этого утверждения следует из соотношения

$$\tilde{L} - \lambda\tilde{I} = \begin{pmatrix} O & I \\ I & -A_2^{-1}A_1 - \lambda I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -A_2^{-1}L(\lambda) & O \\ -\lambda I & I \end{pmatrix},$$

где I, $\tilde{I}$ — тождественные операторы в пространствах H и $\tilde{H}$ соответственно.

Введем в пространстве $\tilde{H}$ оператор-безутианту $\mathrm{Bez}(L, p)$ пучка L и скалярного многочлена $p(\lambda) = a_0 + \lambda a_1 + \lambda^2 a_2$. В работе [1] установлено, что этот оператор представим в виде

$$\mathrm{Bez}(L, p) = \tilde{S} p(\tilde{L}),$$

где

$$\tilde{S} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2 & O \end{pmatrix}.$$

Используя такое представление, нетрудно получить следующее утверждение.

Лемма 2. Если p — действительный многочлен, то

$$[\mathrm{Bez}(L, p)]^* = \mathrm{Bez}(L, p), \quad [\mathrm{Bez}(L, p)\tilde{L}]^* = \mathrm{Bez}(L, p)\tilde{L},$$

т. е. оператор $\mathrm{Bez}(L, p)$ является самосопряженным левым симметризатором оператора $\tilde{L}$.

Напомним, что самосопряженный оператор A называется равномерно положительно (отрицательно) определенным и обозначается $A \gg 0$ $(\ll 0)$, если $(Ax, x) \geqslant \gamma(x, x)$, $\gamma > 0$ $(\gamma < 0)$ $\forall 0 \neq x \in H$.

Теорема 1 [1]. Пусть для самосопряженного пучка L существует такой действительный многочлен p с действительными корнями α_1 и α_2, что операторы $(-1)^i L(\alpha_i)$ $(i = 1, 2)$ одновременно равномерно положительно или отрицательно определенные. Тогда оператор $\mathrm{Bez}(L, p)$ является равномерно определенным левым симметризатором оператора $\tilde{L}$.

Если теперь в пространстве $\tilde{H}$ ввести новое скалярное произведение $[\tilde{x}, \tilde{y}] = (\mathrm{Bez}(L, p)\tilde{x}, \tilde{y})$, то в силу теоремы 1 оно будет топологически эквивалентным исходному. Оператор $\tilde{L}$ относительно такого скалярного произведения является самосопряженным. Таким образом, спектральная задача для операторного пучка сведена к эквивалентной задаче о спектре самосопряженного оператора.

Поступим теперь по-другому. В выражении для $L(\lambda)$ сделаем замену $\lambda = \lambda_1$, $\lambda^2 = \lambda_2$. Соотношение $\lambda_1^2 = \lambda_2$ линеаризуем и симметризуем, как описано выше. Это приведет к двупараметрической задаче о собственных значениях вида

$$(A_0 + \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2) h = 0, \quad 0 \neq h \in H, \quad (Q - \lambda_1 J + \lambda_2 P) z = 0, \quad 0 \neq z \in \mathbb{C}^2,$$

где

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Чтобы оказаться в условиях применимости многопараметрической спектральной теории, развитой в работах [3, 4], во-первых, введем однородный набор параметров $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$, во-вторых, перейдем к пространству $H' = H \otimes \mathbb{C}^2$ со скалярным произведением, задаваемым на разложимых тензорах выражением $(h \otimes z, g \otimes w) = (h, g)(z, w)$ и продолженным по линейности на все пространство. Заметим, что в силу конечномерности одного из сомножителей пространство H' будет полным. Вводя также индуцируемые в пространстве H' операторы $A_i' = A_i \otimes I_2$ $(i = 0, 1, 2)$, I_2 — единичный оператор в $\mathbb{C}^2$, $P' = I \otimes P$, $Q' = I \otimes Q$, $J' = I \otimes J$, приходим к задаче

$$\lambda_0 a_0 + \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 = 1,$$
$$(\lambda_0 A_0' + \lambda_1 A_1' + \lambda_2 A_2') h \otimes z = 0, \quad 0 \neq h \otimes z \in H',$$
$$(\lambda_0 Q' - \lambda_1 J' + \lambda_2 P') h \otimes z = 0.$$

В ней первое из уравнений является условием нормировки.

Предположим теперь, что оператор $\Delta : H' \to H'$ вида

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ A_0' & A_1' & A_2' \\ Q' & -J' & P' \end{pmatrix}$$

(определитель раскрывается путем формального тензорного умножения) является равномерно положительно определенным. Решая последнюю систему уравнений по правилу Крамера относительно $\lambda_i h \otimes z$, приходим к задачам

$$(\Delta^{-1}\Delta_i - \lambda_i I') h \otimes z = 0, \quad 0 \neq h \otimes z \in H' \quad (i = 0, 1, 2),$$

где операторы Δ_i определены как алгебраические дополнения к числам a_i в матрице определителя Δ. Легко видеть, что разделяющие операторы $\Delta^{-1}\Delta_i$ $(i = 0, 1, 2)$ есть самосопряженными относительно скалярного произведения, задаваемого выражением $[h \otimes z, g \otimes w] = (\Delta(h \otimes z), g \otimes \omega)$.

Сравнение описанных способов начнем с установления соответствия между пространствами H' и $\tilde{H}$. Гильбертовы пространства $H' = H \otimes \mathbb{C}^2$ и $\tilde{H} = H \oplus H$ изоморфны. Непосредственно проверяется, что отображение $U : H' \to \tilde{H}$, $h \otimes \langle z_1, z_2 \rangle \to \langle z_1 h, z_2 h \rangle$ осуществляет изоморфизм между H' и $\tilde{H}$. Используя изоморфизм U, находим связь между введенными выше операторами в пространствах H' и $\tilde{H}$:

$$U\Delta_0 U^{-1} = \tilde{S} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2 & O \end{pmatrix}, \quad U\Delta_1 U^{-1} = \tilde{S}\tilde{L} = \begin{pmatrix} -A_0 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix},$$
$$U\Delta_2 U^{-1} = \tilde{S}\tilde{L}^2 = \begin{pmatrix} O & -A_0 \\ -A_0 & -A_1 \end{pmatrix}.$$

Эти соотношения приводят к утверждению.

Теорема 2. Операторы $\Delta = \sum_{i=0}^{2} a_i \Delta_i$ и $\mathrm{Bez}(L, p) = \tilde{S} p(\tilde{L})$ унитарно эквивалентны: $U \Delta U^{-1} = \mathrm{Bez}(L, p)$.

Отсюда очевидным образом получаем такое следствие.

Следствие. Условия $\Delta \gg 0$ и $\mathrm{Bez}(L, p) \gg 0$ эквивалентны.

На этом пути получается также следующая характеристика спектров разделяющей системы операторов $\Delta^{-1}\Delta_i$.

Теорема 3. Спектры операторов $\Delta^{-1}\Delta_i$ и пучка L связаны соотношениями

$$\sigma(\Delta^{-1}\Delta_i) = \left\{\lambda_i \in \mathbb{C} : \lambda_i = \frac{\lambda^i}{p(\lambda)},\ \lambda \in \sigma(L)\right\} (i = 0, 1, 2).$$

Доказательство теоремы 3 получается с привлечением теоремы об отображении спектров [2].

1. *Балинский А. И.* Некоторые способы исследования обобщенных задач на собственные значения : Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Львов, 1972.— 12 с.
2. *Кириллов А. А., Гвишиани А. Д.* Теоремы и задачи функционального анализа.— М. : Наука, 1979.— 384 с.
3. *Atkinson F. V.* Multiparameter eigenvalue problems.— New York ; London : Acad. press, 1972.— Vol. 1. 210 p.
4. *Sleeman B. D.* Multiparameter spectral theory in Hilbert space.— London : Pitman, 1978.— 118 p.

Ин-т прикл. пробл. механики
и математики АН УССР, Львов

Получено
17.05.82

УДК 517.986.2

О. В. Лопушанский

СВОЙСТВА НЕПРЕРЫВНОСТИ УМНОЖЕНИЯ В ТОПОЛОГИЧЕСКИХ АЛГЕБРАХ

Операция умножения полных топологических алгебр с нормируемой топологией, как известно [5], автоматически совместно непрерывна. Известно также обобщение Аренса указанного предложения на случай F-алгебр [4]. Для более общих классов топологических алгебр это свойство не выполняется. Поэтому возникает вопрос об изучении общих свойств непрерывности умножения в топологических алгебрах. Операция умножения представляет собой билинейное отображение на топологической алгебре. В настоящей работе рассмотрены с этой точки зрения различные типы и свойства непрерывности умножения и их связь с регулярными представлениями топологических алгебр [1, 2].

Уточним используемые далее определения. Топологические алгебры по определению представляют собой топологические векторные пространства (ТВП) с раздельно непрерывным умножением. Топологическая алгебра называется полной (квазиполной), если это пространство полно (квазиполно) *. Топология на алгебре не предполагается локально выпуклой. Рассматриваемые далее алгебры обладают единицей и заданы над полями комплексных либо вещественных чисел. Умножение в алгебрах некоммутативно.

Пусть A — топологическая алгебра с единицей e, $L(A)$ — алгебра всех линейных непрерывных отображений алгебры A в себя. Каждому элементу $x \in A$ можно поставить в соответствие два линейных непрерывных оператора, а именно операторы умножения слева или справа на элемент x. Указанное соответствие обозначим через $x \to \chi$, если $\chi : y \to xy$, $x, y \in A$. Так как A содержит единицу, то отображение $x \to \chi$ является алгебраическим изоморфизмом алгебры A в алгебру $L(A)$, который называется левым регулярным представлением алгебры A [1, 4]. Аналогично определяется правое регулярное представление алгебры A. Образ левого (правого) регулярного представления алгебры A или произвольного ее подмножества M обозначается далее через A_L, M_L (A_R, M_R).

* ТВП называют квазиполным, если всякое его ограниченное замкнутое подмножество полно [2].