Доказательство. Легко видеть, что

$$|1-\exp\mu_j(\lambda_k)T| \geqslant \frac{T}{\pi}\exp T\operatorname{Re}\mu_j(\lambda_k)\left|\operatorname{Im}\mu_j(\lambda_k)-\frac{\pi}{T}d(k)\right|,$$

где $d(k)$ — целое число, удовлетворяющее неравенству $|T\operatorname{Im}\mu_j(\lambda_k)-$ $-d(k)\pi|\leqslant\frac{\pi}{2}$.

В случае $d(k)\neq 0$ доказательство теоремы получаем из леммы 2 работы [3], оценок (14) и представления

$$\left|\operatorname{Im}\mu_j(\lambda_k)-\frac{\pi}{T}d(k)\right| = |\lambda_k|\left|\frac{1}{\lambda_k}\operatorname{Im}\mu_j(\lambda_k)-\frac{\pi}{T}\frac{d(k)}{\lambda_k}\right|.$$

Если $d(k)=0$, то доказательство теоремы следует из теоремы 16 работы [5].

Обозначим через A вектор, составленный из коэффициентов уравнения (1). Размерность α вектора A равна количеству неотрицательных целочисленных решений неравенства $s_0+2s_1+\ldots+2s_m\leqslant 2n$.

Если уравнение (13) не имеет кратных корней, то справедлива такая теорема.

Теорема 4. Для почти всех (в смысле меры Лебега в $\mathbb{R}^{\alpha}$) векторов A при $\gamma_2\geqslant\frac{1}{2}m(2n-1)-1$ неравенства (22) выполняются для всех λ_k, $|\lambda_k|>K(A)$.

Доказательство теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 6 из работы [1].

1. *Берник В. И., Пташник Б. И., Салыга Б. О.* Аналог многоточечной задачи для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами.— Дифференц. уравнения, 1977, 13, № 4, с. 637—645.
2. *Левитан Б. М., Саргсян И. С.* Введение в спектральную теорию (самосопряженные обыкновенные дифференциальные операторы).— М. : Наука, 1970.— 671 с.
3. *Полищук В. Н., Пташник Б. И.* О периодической краевой задаче для системы гиперболических уравнений с постоянными коэффициентами.— Укр. мат. журн., 1978, 30, № 3, с. 326—333.
4. *Полищук В. Н., Пташник Б. И.* Периодическая краевая задача для линейных гиперболических уравнений и систем.— Львов, 1982.— 59 с.— (Препринт / АН УССР, Физ.-мех. ин-т; № 64).
5. *Спринджук В. Г.* Метрическая теория диофантовых приближений.— М. : Наука, 1977.— 143 с.
6. *Vejvoda O., Herrmann L., Lovicar V. et al.* Partial differential equations : time-periodic solutions.— USA : Alphen aan den Rijn, The Netherlands, Rockville, Maryland, 1981.— XIII + 358 p.

Ин-т прикл. пробл.
механики и математики АН УССР, Львов

Получено
11.02.83

УДК 539.377

В. Г. Костенко, М. Д. Коркуна

НЕПРЕРЫВНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ ОТ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

В работах [1, 2] решение краевой задачи для системы уравнений термоупругости

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)U \equiv \sum_{k,l=1}^{2} A_{kl}\frac{\partial^2 U}{\partial x_k\partial x_l} = F(x), \quad (x)=(x_1, x_2) \tag{1}$$

в области $H\setminus D$, удовлетворяющее на ее границе Γ условию

$$\lim_{x\to y} B\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right) \equiv \lim_{x\to y}\sum_{k=1}^{2} B_k(y)\frac{\partial U}{\partial x_k} = f(y), \tag{2}$$

представлено в виде

$$U(x)=\int\limits_{H\setminus D}\varphi(x,\,y)\,F(y)\,dy+\int\limits_{\Gamma}J_0(x-z,\ \nu(z),z)\,\mu(z)\,d_z\Gamma. \tag{3}$$

При этом нормальная фундаментальная система решений $\varphi(x,y)$ соответствующей однородной системы (1) и ядро $J_0(x-y,\nu(z),z)$ интеграла типа потенциала найдены в явной форме. Легко проверить, что выражение (3) есть решение системы (1) при произвольной непрерывной плотности $\mu(y)$ и удовлетворяющей условию Гельдера с показателем $\alpha>0$ функции $F(y)$, но чтобы выражение (3) удовлетворяло условию (2), $\mu(y)$ достаточно выбрать решением системы интегральных уравнений

$$\mu(y)+\int\limits_{\Gamma}L(y,\,z)\,\mu(z)\,d_z\Gamma=\psi(y), \tag{4}$$

где $\psi(y)=f(y)-\int\limits_{H\setminus D}B\left(y,\,\frac{\partial}{\partial y}\right)\varphi(y,\,z)\,F(z)\,dz$ непрерывна, если $f(y)$ непрерывна и $F(z)$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем $\alpha>0$:

$$\mu(y)=\begin{Vmatrix}\mu_1(y)\\ \mu_2(y)\end{Vmatrix},\qquad f(y)=\begin{Vmatrix}f_1(y)\\ f_2(y)\end{Vmatrix},\qquad F(z)=\begin{Vmatrix}F_1(z)\\ F_2(z)\end{Vmatrix},$$

$$\begin{gathered}L(y,\,z)=J_1(y-z,\ \nu(z),\ z)=\\ =\frac{2}{\pi}\begin{Vmatrix}J_1^{(1,1)}(y-z,\ \nu(z),\ z); & J_1^{(1,2)}(y-z,\ \nu(z),\ z)\\ J_1^{(2,1)}(y-z,\ \nu(z),\ z); & J_1^{(2,2)}(y-z,\ \nu(z),\ z)\end{Vmatrix},\end{gathered} \tag{5}$$

$$J_1^{(1,1)}(y-z,\ \nu(z),\ z)=\frac{(y-z,\ \nu(y))^2\,(y-z,\ \nu(z))}{r^4(y,\,z)},$$

$$J_1^{(1,2)}(y-z,\ \nu(z),\ z)=\frac{(y-z,\ \nu(y))^2\,[(y_1-z_1)\,\nu_2(z)-(y_2-z_2)\,\nu_1(z)]}{r^4(y,\,z)},$$

$$J_1^{(2,1)}(y-z,\ \nu(z),\ z)=$$
$$=\frac{\{[(y_1-z_1)^2+(y_2-z_2)^2]\,\nu_1(y)\,\nu_2(y)+(y_1-z_1)\,(y_2-z_2)\,(\nu_2^2(y)-\nu_1^2(y))\}\,(y-z,\ \nu(z))}{r^4(y,\,z)},$$

$$J_1^{(2,2)}(y-z,\ \nu(z),\ z)=$$
$$=\frac{\begin{gathered}\{[(y_1-z_1)^2-(y_2-z_2)^2]\,\nu_1(y)\,\nu_2(y)+\\ +(y_1-z_1)\,(y_2-z_2)\,(\nu_2^2(y)-\nu_1^2(y))\}\,[(y_1-z_1)\,\nu_2(z)-(y_2-z_2)\,\nu_1(z)]\end{gathered}}{r^4(y,\,z)},$$

$$r^4(y,\,z)=[(y_1-z_1)^2+(y_2-z_2)^2]^2.$$

Легко убедиться, что если Γ — кривая Ляпунова, то ядро (5) интегрируемо с квадратом $\left(L(y,\,z)=O\left(\frac{1}{|y-z|^l}\right),\ l<1\right)$, поэтому для системы уравнений (4) действует альтернатива Фредгольма. Если же Γ принадлежит классу $C^{(3)}$, то $L(y,z)$ дважды непрерывно дифференцируема вдоль Γ в точках y и $z\in\Gamma$, $y\neq z$,

$$\frac{\partial L(y,\,z)}{\partial z_j}=O\left(\frac{1}{|y-z|^{l+1}}\right),$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y_i}+\frac{\partial}{\partial z_i}\right)\frac{\partial L(y,\,z)}{\partial z_j}=O\left(\frac{1}{|y-z|^{l+1}}\right),\quad i,\ j=1,\ 2.$$

Тогда произвольное решение уравнения

$$v(y)+\int\limits_{\Gamma}v(z)\,L(z,\ y)\,d_z\Gamma=0 \tag{6}$$

непрерывно дифференцируемо и его производная по касательному направлению к Γ удовлетворяет условию Гельдера [5].

Если $\psi(y)$ непрерывна (удовлетворяет условию Гельдера) и ортогональна на Γ произвольному решению $v(y)$ уравнения (6), т. е. $\int\limits_{\Gamma} v(y)\,\psi(y)\,d_y\Gamma = 0$, то любое решение уравнения (4) непрерывно (удовлетворяет условию Гельдера) на Γ. При этом установлено [3, 4] существование резольвенты $R(y, z)$, наделенной всеми вышесформулированными свойствами ядра $L(y, z)$. С помощью $R(y, z)$ вся совокупность решений уравнения (4) представляется в виде

$$\mu(y) = \psi(y) + \int\limits_{\Gamma} R(y, z)\,\psi(z)\,d_z\Gamma + \sum_{k=1}^{m} c_k\mu_k(y), \tag{7}$$

где $\mu_1(y), \ldots, \mu_m(y)$ — все линейно независимые решения соответствующего однородного уравнения (4); $c_1, \ldots, c_m$ — произвольные постоянные.

Рассмотрим теперь столбец $\tilde{\psi}(y)$ таких непрерывных функций, что $\int\limits_{\Gamma} v(y)\,\tilde{\psi}(y)\,d_y\Gamma = 0$ для произвольного решения уравнения (6) и, кроме того:

$$|\tilde{\psi}(y) - \psi(y)| < \delta_1 \tag{8}$$

для всех $y \in \Gamma$. Тогда для произвольного $\varepsilon_1 > 0$ и любого решения $\mu(y)$ уравнения (4) можно найти $\delta_1 > 0$ и такое решение $\mu(y)$ интегрального уравнения

$$\tilde{\mu}(y) + \int\limits_{\Gamma} L(y, z)\,\tilde{\mu}(z)\,d_z\Gamma = \tilde{\psi}(y), \tag{9}$$

что

$$|\tilde{\mu}(y) - \mu(y)| < \varepsilon_1 \tag{10}$$

для всех $y \in \Gamma$.

Действительно, вся совокупность решений уравнения (9), как и уравнения (4), имеет вид

$$\tilde{\mu}(y) = \tilde{\psi}(y) + \int\limits_{\Gamma} R(y, z)\,\tilde{\psi}(z)\,d_z\Gamma + \sum_{k=1}^{m} c_k\mu_k(y). \tag{11}$$

Выбираем теперь в уравнениях (7) и (11) одни и те же постоянные $c_1, \ldots, c_m$ и по $\varepsilon_1 > 0$ находим $\delta_1 > 0$ так, чтобы

$$|\tilde{\mu}(y) - \mu(y)| \leqslant |\tilde{\psi}(y) - \psi(y)| + \int\limits_{\Gamma} |R(y, z)|\,|\tilde{\psi}(z) - \psi(z)|\,d_z\Gamma \leqslant$$
$$\leqslant \delta_1 B = \varepsilon_1. \tag{12}$$

Здесь учтено, что $R(y, z) = O\left(\frac{1}{|y - z|^l}\right)$ и непрерывно дифференцируема в точках y и z, $z \neq y$, $l < 1$ и $1 + \max\limits_{y\in\Gamma} \int\limits_{\Gamma} |R(y, z)|\,d_z\Gamma \leqslant B$.

Замечание. В частности, если для интегральных уравнений (4) и (9) действует первая теорема Фредгольма, то в формулах (7) и (11) $c_1, \ldots, c_m = 0$ и для единственных решений уравнений (4) и (9) сохраняется неравенство (12).

Рассмотрим теперь задачу о нахождении решения системы уравнений

$$\sum_{k,l=1}^{2} A_{kl}\,\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial x_k \partial x_l} = \tilde{F}(x) \tag{13}$$

в области $H \setminus D$, удовлетворяющего на ее границе Γ условию

$$\lim_{x\to y\in\Gamma} B\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right) U = \tilde{f}(y). \tag{14}$$

Предполагаем, что $\tilde{F}(x)$ удовлетворяет в области $H \setminus D$ условию Гельдера с показателем $\alpha > 0$, $\tilde{f}(y)$ непрерывна на Γ и, кроме того, $|\tilde{F}(x) - F(x)| < \delta$, $|\tilde{f}(y) - f(y)| < \delta$ для всех $x \in H \setminus D$, $y \in \Gamma$. Тогда (9) будет системой интегральных уравнений для задачи (13), (14), если принять $\tilde{\psi}(y) = \tilde{f}(y) -$

$-\int\limits_{H\setminus D} B\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) \varphi(y, z) \tilde{F}(z)\,dz$. Учитывая аналогичное представление для $\psi(y)$, получаем

$$|\tilde{\psi}(y) - \psi(y)| \leqslant |\tilde{f}(y) - f(y)| + \int\limits_{H\setminus D} \left| B\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) \varphi(y, z)\right| |\tilde{F}(z) - F(z)|\,dz,$$

и так как $B\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right)\varphi(y, z) = O\left(\frac{1}{|y-z|}\right)$, то для произвольного $\delta_1 > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, чтобы удовлетворялось неравенство

$$|\tilde{\psi}(y) - \psi(y)| < \delta C = \delta_1 \qquad (15)$$

и, как следствие, неравенство (10).

Решение $\tilde{U}(x)$ задачи (13), (14) представляется формулой вида (3) с заменой в последней $F(y)$ на $\tilde{F}(y)$ и $\mu(z)$ на $\tilde{\mu}(z)$.

Фундаментальная матрица решений $\varphi(x, z)$ и ядро $J_0(x-z, \nu(z), z) = O\left(\lg\frac{1}{|x-z|}\right)$. Поэтому по заданному $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, чтобы

$$|\tilde{U}(x) - U(x)| \leqslant \int\limits_{H\setminus D} |\varphi(x, y)|\,|\tilde{F}(y) - F(y)|\,dy +$$

$$+ \int\limits_{\Gamma} |J_0(x-z, \nu(z), z)|\,|\tilde{\mu}(z) - \mu(z)|\,d_z\Gamma \leqslant \delta \int\limits_{H\setminus D} |\varphi(x, y)|\,dy +$$

$$+ \delta CB \int\limits_{\Gamma} |J_0(x-z, \nu(z), z)|\,d_z\Gamma \leqslant \delta M = \varepsilon$$

для всех $x \in H \setminus D$. Здесь учтены также неравенства (15), (12) и неравенство

$$\int\limits_{H\setminus D} |\varphi(x, y)|\,dy + CB\int\limits_{\Gamma} |J_0(x-z, \nu(z), z)|\,d_z\Gamma < M.$$

Таким образом, установлено, что произвольное решение задачи (1), (2), представимое в форме (3), непрерывно зависит от краевого условия (2) и свободного члена системы уравнений (1).

1. *Костенко В. Г., Коркуна М. Д.* Фундаментальна матриця розв'язків однієї еліптичної системи рівнянь у частинних похідних.— Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат., 1982, вип. 20, с. 38—42.
2. *Костенко В. Г., Коркуна М. Д.* Зведення однієї крайової задачі до системи регулярних інтегральних рівнянь.— Там же, с. 34—38.
3. *Лопатинский Я. Б.* Фундаментальная система решений эллиптической системы линейных дифференциальных уравнений.— Укр. мат. журн., 1951, 3, № 1, с. 3—38.
4. *Лопатинский Я. Б.* Об одном способе приведения граничных задач для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям.— Там же, 1953, 5, № 2, с. 123—151.
5. *Лаврук Б. Р.* Об одном типе граничных задач для эллиптических систем линейных дифференциальных уравнений второго порядка : Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Львов, 1956.— 15 с.

Львов. ун-т Получено 12.04.83

УДК 517.942:531

Ю. П. Ярмолюк

РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С РАЗРЫВНЫМИ И СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

При решении задач теплопроводности и термоупругости для кусочно-однородных тел оказывается целесообразным применение единичной функции Хевисайда, обобщенной дельта-функции Дирака и ее производных [4, 7, 9, 10]. В связи с этим возникает необходимость интегрирования обыкновенных