

$\vec{H}$  вычисляются функции  $H = H[\alpha]$  на временной сетке  $K$  равноудаленных узлов периода  $T$  ( $K \geq 4n + 1$ ) для всех  $y = y_l$  ( $l = 1, L$ ); б) по известной функции  $\mu = \mu[H]$  и найденным значениям  $H = H[\alpha]$  в узлах временной сетки определяются значения  $\mu[\alpha]$  в этих же узлах для всех сечений  $y = y_l$ ; в) по формулам численного гармонического анализа вычисляются первые  $1 + 4n$  коэффициентов рядов вида (27) для всех  $y = y_l$ ; г) формируются матрицы  $\mu_s$  для всех  $y = y_l$ ; д) формируются матрицы коэффициентов и вектор правых частей уравнения (20); е) уравнение (20) решается относительно вектора  $\vec{H}_{l+1}$ .

Если при принятом нулевом приближении для вектора  $\vec{H}$  итерационный процесс не обнаруживает тенденции к сходимости после 5—6 итераций, то для определения удовлетворительного (под углом зрения сходимости) нулевого приближения следует воспользоваться методом продолжения решения по параметру. Параметризованное уравнение (19а) целесообразно составить в виде

$$C_1 \vec{H} - C_2 \vec{B} - h \vec{H}_r = 0. \quad (29)$$

Продифференцировав его по  $h$ , приходим к нелинейному векторному дифференциальному уравнению

$$(C_1 - C_2 \hat{\mu}) \frac{d\vec{H}}{dh} = \vec{H}_r. \quad (30)$$

Из уравнения (29) очевидно, что при  $h = 0$  справедливы равенства  $\vec{H} = 0$ ,  $\vec{B} = 0$ . Поэтому, интегрируя уравнение (30) численным способом при нулевых начальных условиях в пределах от  $h = 0$  до  $h = 1$ , при  $h = 1$  получаем вектор  $\vec{H}$ , который может быть принят в качестве нулевого приближения для рассмотренной выше итерационной процедуры.

В соответствии с изложенным алгоритмом была составлена программа расчета периодического во времени электромагнитного поля в ферромагнитной пластине. Результаты расчета на ЭВМ ЕС-1060 для пластины толщиной 1,0 мм при  $H_r = 800 \cos 314t$  приведены на рис. 2 (материал пластины — электротехническая сталь Э330,  $\gamma = 0,75 \cdot 10^7$  1/Ом · м).

1. Глухивский Л. И. Алгоритм расчета на ЦВМ бегущей электромагнитной волны в проводящем ферромагнитном слое. — Мат. методы и физ.-мех. поля, 1980, вып. 12, с. 113—118.
2. Фильц Р. В., Музыка И. М. Определение эквивалентных характеристик намагничивания слоистой ферромагнитной среды при одномерном периодическом перемагничивании. — Там же, 1983, вып. 18, с. 95—99.

Институт прикладных проблем механики  
и математики АН УССР, Львов

Получено 22.02.82

УДК 530.12 : 531.51

Р. М. Пляцко, А. Л. Вынар

#### ДВИЖЕНИЕ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ПРОБНОГО ТЕЛА В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ИСТОЧНИКА

Согласно работам [2, 3], уравнения Папапетру, описывающие движение вращающегося пробного тела в гравитационном поле, имеют в поле Шварцшильда решения, из которых следует, что тело с ультрарелятивистской скоростью может двигаться по круговым орбитам, плоскость которых не пере-

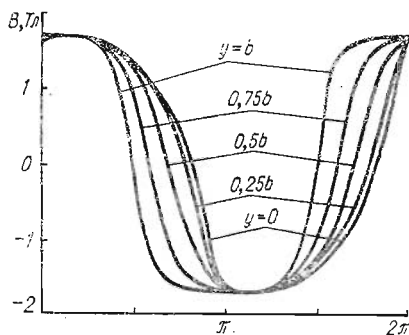


Рис. 2

секает центр источника поля (зависающие орбиты для значений радиальной координаты из области  $2\frac{1}{7}m < r < 3m$ ). Цель настоящей статьи — исследовать область существования зависающих круговых орбит в поле Керра, а также найти зависимость угла зависания от радиальной координаты.

Используем запись метрики Керра в координатах Бойера — Линдквиста [1]:

$$\begin{aligned} x^1 = r, \quad x^2 = \theta, \quad x^3 = \varphi, \quad x^4 = t, \\ g_{11} = -\frac{\rho^2}{\Delta}, \quad g_{22} = -\rho^2, \quad g_{33} = -\left(r^2 + a^2 + \frac{2mra^2}{\rho^2} \sin^2 \theta\right) \sin^2 \theta, \\ g_{34} = \frac{2mra}{\rho^2} \sin^2 \theta, \quad g_{44} = 1 - \frac{2mr}{\rho^2}, \\ \rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad \Delta = r^2 - 2mr + a^2. \end{aligned} \quad (1)$$

Исследуем, имеют ли уравнения Папапетру при дополнительном условии Пирани частные решения, для которых выполняются соотношения

$$\begin{aligned} r = \text{const}, \quad \theta = \text{const} \neq 0, \quad \frac{\pi}{2}, \quad \pi, \quad u^3 \equiv \frac{d\varphi}{ds} = \text{const}, \\ u^4 \equiv \frac{dt}{ds} = \text{const}, \quad S_3 \equiv S_\varphi = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

( $S_3$  — компонента 3-вектора спина [2, 3]). Из спиновой части [2, 3] уравнений Папапетру с учетом выражений (1), (2) находим

$$\begin{aligned} S_1 = \text{const}, \quad S_2 = \text{const}, \\ S_1 (\Gamma_{34}^1 u_3 u^3 - \Gamma_{34}^1 u_4 u^4 + \Gamma_{44}^1 u_3 u^4 - \Gamma_{33}^1 u_4 u^3) + \\ + S_2 (\Gamma_{34}^2 u_3 u^3 - \Gamma_{34}^2 u_4 u^4 + \Gamma_{44}^2 u_3 u^4 - \Gamma_{33}^2 u_4 u^3) = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\Gamma_{uv}^\lambda$  — символы Кристоффеля для метрики (1). Поступательная часть уравнений Папапетру с учетом формул (1), (2) дает два нетривиальных соотношения

$$\begin{aligned} g_{33} u^3 u^3 + 2g_{34} u^3 u^4 + g_{44} u^4 u^4 + \\ + \frac{1}{M} (g_{33,i} A^3 u^3 + g_{34,i} A^3 u^4 + g_{34,i} A^4 u^3 + g_{44,i} A^4 u^4) = B_i, \end{aligned} \quad (4)$$

где индекс  $i$  принимает значения 1 и 2; запятая возле индекса обозначает соответствующую частную производную по координате;  $M$  — масса пробного тела;

$$\begin{aligned} A^3 \equiv u_\mu \frac{DS^{3\mu}}{ds} = -\frac{u_4}{u_3} A^4 = \frac{S_2}{\sqrt{-g}} (u_3 u^3 \Gamma_{13}^3 + u_3 u^4 \Gamma_{14}^3 + u_4 u^3 \Gamma_{13}^4 + \\ + u_4 u^4 \Gamma_{14}^4) - \frac{S_1}{\sqrt{-g}} (u_3 u^3 \Gamma_{23}^3 + u_3 u^4 \Gamma_{24}^3 + u_4 u^3 \Gamma_{23}^4 + u_4 u^4 \Gamma_{24}^4); \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} B_i = 2g_{11} \left[ \frac{S_2}{Mu_4 \sqrt{-g}} (-u^3 u_4 R_{313}^i + u^3 u_3 R_{314}^i - u^4 u_4 R_{413}^i + u^4 u_3 R_{414}^i) + \right. \\ \left. + \frac{S_1}{Mu_4 \sqrt{-g}} (u^3 u_4 R_{323}^i - u^3 u_3 R_{324}^i + u^4 u_4 R_{423}^i - u^4 u_3 R_{424}^i) \right] \end{aligned} \quad (6)$$

( $D/ds$  — ковариантная производная,  $S^{\mu\nu}$  — тензор спина,  $g$  — определитель метрического тензора,  $R_{\mu\nu\sigma}^\lambda$  — тензор кривизны).

Из условия натуральности параметра  $s$   $u_\mu u^\mu = 1$  в предположении ультрарелятивистского характера движений, когда  $|ru^3| \gg 1$ , получаем

$$u^4 \approx ku^3 \left[ 1 \pm \frac{\kappa}{(u^3)^2} \right], \quad (7)$$

где

$$k = -\frac{g_{33}}{g_{44}} \pm \frac{1}{g_{44}} \sqrt{g_{34}^2 - g_{33}g_{44}}; \quad \varkappa = \frac{1}{2k \sqrt{g_{34}^2 - g_{33}g_{44}}}. \quad (8)$$

Учитывая соотношение (7), из уравнений (4) находим

$$u^3 \approx -\frac{1}{\varepsilon}. \quad (9)$$

Здесь

$$\varepsilon = \frac{S_2}{M \sqrt{-g}} [(g_{33} + kg_{34})(\Gamma_{13}^3 + k\Gamma_{14}^3) + (g_{34} + kg_{44})(\Gamma_{13}^4 + k\Gamma_{14}^4)] - \\ - \frac{S_1}{M \sqrt{-g}} [(g_{33} + kg_{34})(\Gamma_{23}^3 + k\Gamma_{24}^3) + (g_{34} + kg_{44})(\Gamma_{23}^4 + k\Gamma_{24}^4)], \quad (10)$$

причем  $|\varepsilon| \ll 1$  ввиду пробности тела [2, 3]. Используя формулы (5) — (10), получаем условие совместности уравнений системы (4), а тем самым условие совместности системы уравнений Папаетру с соотношениями (2):

$$\frac{1}{g_{34} + kg_{44}} [(g_{34,1} + kg_{44,1})(g_{33,2} + 2g_{34,2}k + g_{44,2}k^2) - \\ - (g_{34,2} + kg_{44,2})(g_{33,1} + 2g_{34,1}k + g_{44,1}k^2)] = \\ = B_1(g_{33,2} + 2g_{34,2}k + g_{44,2}k^2) - B_2(g_{33,1} + 2g_{34,1}k + g_{44,1}k^2). \quad (11)$$

Учитывая соотношения (3), (6) — (10) и выражая компоненты тензора кривизны через компоненты метрического тензора, сводим условие (11) к виду

$$\left[ (g_{33,1} + 2g_{34,1}k + g_{44,1}k^2) \alpha_1 + \frac{g_{11}}{g_{22}} (g_{33,2} + 2g_{34,2}k + g_{44,2}k^2) \alpha_2 \right] \times \\ \times [(g_{34,1} + kg_{44,1})(g_{33,2} + 2g_{34,2}k + g_{44,2}k^2) - \\ - (g_{34,2} + kg_{44,2})(g_{33,1} + 2g_{34,1}k + g_{44,1}k^2)] = \\ = -(g_{33,2} + 2g_{34,2}k + g_{44,2}k^2) \left\{ \alpha_1 [(g^{11}g_{11,1} + g^{33}g_{33,1} + 2g^{34}g_{34,1} + \right. \\ \left. + g^{44}g_{44,1}) \alpha_1 - 2\alpha_{1,1}] - \alpha_2 \frac{g_{11}}{g_{22}} \{-g^{22}g_{22,1}\alpha_2 + 2\alpha_{1,2} + \right. \\ \left. + [g_{33,1}(g_{34} + kg_{44}) - g_{34,1}(g_{33} + kg_{34})] \times \right. \\ \left. \times [g^{33}g_{33,2} + g^{34}g_{34,2} + k(g^{33}g_{34,2} + g^{34}g_{44,2})] + \right. \\ \left. + [g_{34,1}(g_{34} + kg_{44}) - g_{44,1}(g_{33} + kg_{34})] \times \right. \\ \left. \times [g^{34}g_{33,2} + g^{44}g_{34,2} + k(g^{34}g_{34,2} + g^{44}g_{44,2})] \right\} + (g_{33,1} + 2g_{34,1}k + g_{44,1}k^2) \times \\ \times \left\{ \alpha_1 \{g^{11}g_{11,2}\alpha_1 - 2\alpha_{2,1} - [g_{33,2}(g_{34} + kg_{44}) - g_{34,2}(g_{33} + kg_{34})] \times \right. \\ \left. \times [g^{33}g_{33,1} + g^{34}g_{34,1} + k(g^{33}g_{34,1} + g^{34}g_{44,1})] - \right. \\ \left. - [g_{34,2}(g_{34} + kg_{44}) - g_{44,2}(g_{33} + kg_{34})] \times \right. \\ \left. \times [g^{34}g_{33,1} + g^{44}g_{34,1} + k(g^{34}g_{34,1} + g^{44}g_{44,1})] \right\} - \\ - \alpha_2 \frac{g_{11}}{g_{22}} \{-g^{22}g_{22,2} + g^{33}g_{33,2} + 2g^{34}g_{34,2} + g^{44}g_{44,2}\} \alpha_2 + 2\alpha_{2,2} \left. \right\}, \quad (12)$$

где

$$\alpha_i \equiv g_{44,i}(g_{33} + kg_{34})k - g_{33,i}(g_{34} + kg_{44}) + g_{34,i}(g_{33} - k^2g_{44}); \quad (13) \\ \alpha_{i,j} \equiv g_{44,ij}(g_{33} + kg_{34})k - g_{33,ij}(g_{34} + kg_{44}) + g_{34,ij}(g_{33} - k^2g_{44}).$$

Учитывая выражения (1), представим условие (12) в виде алгебраического уравнения девятой степени относительно  $\sin \theta$ :

$$\sum_{k=0}^9 A_k \sin^k \theta = 0. \quad (14)$$

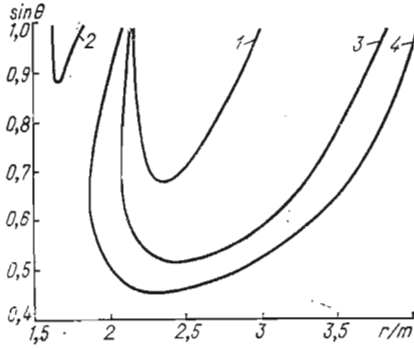
Здесь

$$A_0 = b_0 \Delta_1 b_0 d_0; \quad A_1 = b_1 \Delta_1 b_0 d_0 + b_0 \Delta_1 (b_1 d_0 + b_0 d_1);$$

$$A_2 = a_0 (a_0 c_0 + \Delta_1 b_0 e_0) + b_0 (a_0 f_0 - \Delta_1 b_0 d_0) + b_2 \Delta_1 b_0 d_0 + \\ + b_1 \Delta_1 (b_1 d_0 + b_0 d_1) + b_0 \Delta_1 (b_2 d_0 + b_1 d_1 + b_0 d_2);$$

$$A_3 = a_1 (a_0 c_0 + \Delta_1 b_0 e_0) + a_0 \left( \sum_{i+k=1} a_i c_k + \Delta_1 \sum_{i+k=1} b_i e_k \right) + b_1 (a_0 f_0 - \Delta_1 b_0 d_0) + \\ + b_0 \left( \sum_{i+k=1} a_i f_k - \Delta_1 \sum_{i+k=1} b_i d_k \right) + b_2 \Delta_1 \sum_{i+k=1} b_i d_k + b_1 \Delta_1 \sum_{i+k=2} b_i d_k + \\ + b_0 \Delta_1 \sum_{i+k=3} b_i d_k;$$

$$A_4 = a_2 (a_0 c_0 + \Delta_1 b_0 e_0) + a_1 \left( \sum_{i+k=1} a_i c_k + \Delta_1 \sum_{i+k=1} b_i e_k \right) +$$



$$+ a_0 \left( \sum_{i+k=2} a_i c_k + \Delta_1 \sum_{i+k=2} b_i e_k \right) + \\ + b_2 (a_0 f_0 - \Delta_1 b_0 d_0) + \\ + b_1 \left( \sum_{i+k=1} a_i f_k - \Delta_1 \sum_{i+k=1} b_i d_k \right) + \\ + b_0 \left( \sum_{i+k=2} a_i f_k - \Delta_1 \sum_{i+k=2} b_i d_k \right) + \\ + b_2 \Delta_1 \sum_{i+k=2} b_i d_k + b_1 \Delta_1 \times \\ \times \sum_{i+k=3} b_i d_k + b_0 \Delta_1 \sum_{i+k=4} b_i d_k;$$

$$A_5 = a_2 \left( \sum_{i+k=1} a_i c_k + \Delta_1 \sum_{i+k=1} b_i e_k \right) + a_1 \left( \sum_{i+k=2} a_i c_k + \Delta_1 \sum_{i+k=2} b_i e_k \right) + \\ + a_0 \left( \sum_{i+k=3} a_i c_k + \Delta_1 \sum_{i+k=3} b_i e_k \right) + b_2 \left( \sum_{i+k=1} a_i f_k - \Delta_1 \sum_{i+k=1} b_i d_k \right) + \\ + b_1 \left( \sum_{i+k=2} a_i f_k - \Delta_1 \sum_{i+k=2} b_i d_k \right) + b_0 \left( \sum_{i+k=3} a_i f_k - \Delta_1 \sum_{i+k=3} b_i d_k \right) + \\ + b_2 \Delta_1 \sum_{i+k=3} b_i d_k + b_1 \Delta_1 \sum_{i+k=4} b_i d_k + b_0 \Delta_1 \sum_{i+k=5} b_i d_k;$$

$$A_6 = a_2 \left( \sum_{i+k=2} a_i c_k + \Delta_1 \sum_{i+k=2} b_i e_k \right) + a_1 \left( \sum_{i+k=3} a_i c_k + \Delta_1 \sum_{i+k=3} b_i e_k \right) + \\ + a_0 \left( \sum_{i+k=4} a_i c_k + \Delta_1 \sum_{i+k=4} b_i e_k \right) + b_2 \left( \sum_{i+k=2} a_i f_k - \Delta_1 \sum_{i+k=2} b_i d_k \right) + \\ + b_1 \left( \sum_{i+k=3} a_i f_k - \Delta_1 \sum_{i+k=3} b_i d_k \right) + b_0 \left( a_2 f_2 - \Delta_1 \sum_{i+k=4} b_i d_k \right) + \\ + b_2 \Delta_1 \sum_{i+k=4} b_i d_k + b_1 \Delta_1 \sum_{i+k=5} b_i d_k + b_0 \Delta_1 b_2 d_4;$$

$$A_7 = a_2 \left( \sum_{i+k=3} a_i c_k + \Delta_1 \sum_{i+k=3} b_i e_k \right) + a_1 \left( \sum_{i+k=4} a_i c_k + \Delta_1 \sum_{i+k=4} b_i e_k \right) + \\ + a_0 a_2 c_3 + b_2 \left( \sum_{i+k=3} a_i f_k - \Delta_1 \sum_{i+k=3} b_i d_k \right) + b_1 \left( a_2 f_2 - \Delta_1 \sum_{i+k=4} b_i d_k \right) - \\ - b_0 \Delta_1 \sum_{i+k=5} b_i d_k + b_2 \Delta_1 \sum_{i+k=5} b_i d_k + b_1 \Delta_1 b_2 d_4;$$

$$A_8 = a_2 \left( \sum_{i+k=4} a_i c_k + \Delta_1 \sum_{i+k=4} b_i e_k \right) + a_1 a_2 c_3 + a_0 \Delta_1 b_2 e_4 + \\ + b_2 \left( a_2 f_2 - \Delta_1 \sum_{i+k=4} b_i d_k \right) - b_1 \Delta_1 \sum_{i+k=5} b_i d_k - (b_0 - b_2) \Delta_1 b_2 d_4;$$

$$A_9 = a_2 a_2 c_3 + a_1 \Delta_1 b_2 e_4 - b_2 \Delta_1 (b_2 d_3 + b_1 d_4) - b_1 \Delta_1 b_2 d_4,$$

где

$$\begin{aligned}
 a_2 &= (\lambda - 1)\beta^2; & a_1 &= \pm 2\sqrt{\Delta_1}\lambda\beta; & a_0 &= \lambda^3 - 3\lambda^2 + \lambda\beta^2 + \beta^2; \\
 b_2 &= \beta^2; & b_1 &= \pm 2\sqrt{\Delta_1}\beta; & b_0 &= \lambda^2 + \beta^2; & c_3 &= 2\Delta_1\beta^3; \\
 c_2 &= \pm\sqrt{\Delta_1}(\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda\beta^2 - \beta^2)\beta^2; & c_1 &= \Delta_1(2\lambda^3 + 6\lambda^2 + 2\lambda\beta^2 - 2\beta^2)\beta; \\
 c_0 &= \pm\sqrt{\Delta_1}(\lambda^5 - 3\lambda^4 + 2\lambda^3\beta^2 - 2\lambda^2\beta^2 + \lambda\beta^4 + \beta^4); \\
 d_4 &= \pm\sqrt{\Delta_1}(\lambda - 1)\beta^4; & d_3 &= 2\Delta_1(\lambda - 2)\beta^3; \\
 d_2 &= \pm\sqrt{\Delta_1}\lambda(\lambda^2 - 2\lambda + \beta^2)\beta^2; & d_1 &= -4\Delta_1(2\lambda^2 - \beta^2)\beta; \\
 d_0 &= \mp\sqrt{\Delta_1}(\lambda^4 - \beta^4); & e_4 &= \pm\sqrt{\Delta_1}\beta^4; & e_3 &= 2\Delta_1\beta^3; \\
 e_2 &= \pm\sqrt{\Delta_1}(\lambda^2 - 9\lambda)\beta^2; & e_1 &= -2\beta^3\Delta_1; \\
 e_0 &= \pm\sqrt{\Delta_1}(-3\lambda^3 - \lambda^2\beta^2 + 9\lambda\beta^2 - \beta^4); & f_2 &= \mp\Delta_1^{1/2}\lambda(\lambda + 8)\beta^2; \\
 f_1 &= -2\lambda^2\Delta_1^2\beta; & f_0 &= \pm\Delta_1^{3/2}\lambda(-\lambda^3 - \lambda\beta^2 + 8\beta^2),
 \end{aligned}$$

причем

$$\lambda \equiv \frac{r}{m}, \quad \beta \equiv \frac{a}{m}, \quad \Delta_1 \equiv \lambda^2 - 2\lambda + \beta^2,$$

т. е. все коэффициенты  $A_k$  выражаются через  $\lambda$  и  $\beta$ .

Уравнение (14) для различных значений  $\lambda$  и  $\beta$  решалось численными методами с помощью ЭВМ. Некоторые результаты приведены на рисунке. Кривая 1 получена для  $\beta = 0$ , кривые 2 и 3 — для  $\beta = 0,8$ , кривая 4 — для  $\beta = 1$ . Кривая 2 соответствует случаю ковращения, когда направления вращения источника поля и движения пробного тела по орбите совпадают, кривые 3, 4 — контравращению, причем кривая 2 лежит под эргосферой. Область существования для контравращающихся орбит с ростом  $\beta$  от 0 до 1 непрерывно расширяется от  $2\frac{1}{7}m < r < 3m$  до  $1,89m < r < 4m$ , а максимальное значение угла подъема  $\pi/2 - \theta$  увеличивается от  $47^\circ$  (при  $r = 2,35m$ ,  $\beta = 0$ ) до  $63^\circ$  (при  $r = 2,4m$ ,  $\beta = 1$ ). В случае ковращения с ростом  $\beta$  область существования равномерно уменьшается и при  $\beta \geq 0,7$  вне эргосферы зависящих круговых орбит нет, но при  $\beta \approx 0,5$  появляются орбиты под эргосферой, для которых максимальный угол подъема ( $\approx 30^\circ$ ) достигается при  $\beta \approx 0,8$ . Следовательно, в случае поля Керра область существования и зависимость угла зависания от радиальной координаты для зависящих круговых орбит существенно отличаются от того, что имело место в поле Шварцшильда. Более детальное обсуждение других аспектов можно найти в работе [4].

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля.— М.: Наука, 1973.— 504 с.
2. Пляцко Р. М. Частные решения уравнений Папаетру при условии Пирани.— Минск, 1978.— 29 с.— (Препринт/АН БССР. Ин-т физики; № 158).
3. Пляцко Р. М. Эффекты эйнштейновой теории тяготения, обусловленные колебаниями и спином пробного тела: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Минск, 1979.— 16 с.
4. Пляцко Р. М., Вынар А. Л. Существенно негеодезические движения вращающегося пробного тела в ОТО.— Докл. АН СССР, 1982, 263, № 5, с. 1125—1128.