8. *Музыченко Ю. Н.* Изгиб и устойчивость прямоугольных пластин, ослабленных прямоугольными вырезами.— В кн.: Теория оболочек и пластин. Ереван : Изд-во АН АрмССР, 1964, с. 724—732.
9. *Налоев В. Г.* Устойчивость пластин с вырезами.— В кн.: Теория оболочек и пластин : Тр. IX Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. Л. : Судостроение, 1975, с. 138—140.
10. *Преображенский И. Н.* Об устойчивости прямоугольных пластинок с отверстиями.— В кн.: Конструирование и расчет зданий и сооружений для научных исследований. М. : Наука, 1973, с. 71—75.
11. *Преображенский И. Н.* О применении импульсных функций для исследования устойчивости пластинок с отверстиями.— Гидроаэромеханика и теория упругости, 1973, вып. 17, с. 136—143.
12. *Преображенский И. Н.* Устойчивость и колебания пластин и оболочек с отверстиями.— М. : Машиностроение, 1981.— 190 с.
13. *Nishihara Seiichiro.* On the shear buckling strength of perforated plates and their reinforcements.— J. Sop. Nav. Archit. Jap., 1978, 143, p. 301—307.
14. *Winoya M., Redwood P.* Elasto-plastic stability in displacement of squares plates with round hole.— Comput. and Struct., 1981, 8, p. 291—300.

Завод-ВТУЗ при Московском автозаводе им. П. А. Лихачева

Получено 19.11.82

УДК 538.56

И. М. Музычка, Р. В. Фильц, Л. И. Глухиевский

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ВО ВРЕМЕНИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В ПРОВОДЯЩЕЙ ФЕРРОМАГНИТНОЙ ПЛАСТИНЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ ГАРМОНИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

Изложенный в работе [2] метод расчета одномерного периодического во времени электромагнитного поля в ферромагнитной пластине при разных видах задаваемых граничных условий основан на алгебраизации дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} = \gamma \frac{\partial B_z}{\partial t} \tag{1}$$

сеточными уравнениями. В ряде задач временные спектры функций $H_z = H_z[y, t]$; $B_z = B_z[y, t]$ с достаточной для практических целей точностью могут быть представлены усеченными рядами Фурье с удержанием небольшого числа членов, и тогда для решения краевой задачи расчета электромагнитного поля более эффективным оказывается комбинированный метод, объединяющий в себе идею сеточного и дифференциального гармонического методов [1].

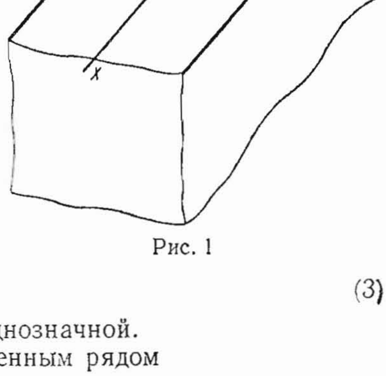

Рис. 1

Пусть необходимо найти решение уравнения (1) для пластины толщиной $2b$, имеющей в направлениях осей x и z бесконечные размеры (рис. 1), при граничных условиях

$$H[y = b, t] = H_\text{г}[t] = H_\text{г}[t + T];$$
$$\left.\frac{dH}{dy}\right|_{y=0} = 0, \tag{2}$$

где T — временной период процесса. Здесь и далее для краткости индекс z пропущен. Зависимость

$$B = B[H] \tag{3}$$

будем полагать нелинейной монотонной и однозначной.

Представим граничное условие (2) усеченным рядом

$$H[y = b, t] = H_{\text{г}0} + \sum_{\nu=1}^{n} (H_{\text{г}c\nu} \cos \nu\omega t + H_{\text{г}s\nu} \sin \nu\omega t). \tag{4}$$

Здесь $H_{\text{г}0}$, $H_{\text{г}c\nu}$, $H_{\text{г}s\nu}$ — заданные величины; $\omega = 2\pi/T$.

Ищем решение $H = H[y, t]$ уравнения (1) в виде

$$H = H_0 + \sum_{\nu=1}^{n} (H_{c\nu} \cos \nu\omega t + H_{s\nu} \sin \nu\omega t), \tag{5}$$

где H_0, $H_{c\nu}$, $H_{s\nu}$— искомые функции координаты y, и ограничим временной спектр зависимости $B = B[y, t]$ n гармониками, т. е. представим эту зависимость усеченным рядом

$$B = B_0 + \sum_{\nu=1}^{n} (B_{c\nu} \cos \nu\omega t + B_{s\nu} \sin \nu\omega t). \tag{6}$$

Определим B_0, $B_{c\nu}$, $B_{s\nu}$ $(\nu = \overline{1, n})$ как функции от величин H_0, $H_{c\nu}$, $H_{s\nu}$ $(\nu = \overline{1, n})$ в любом сечении y с помощью рекуррентной системы алгебраических соотношений, состоящей из выражений (5), зависимости (3) и формул

$$B_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} B d\alpha, \quad B_{c\nu} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} B \cos \nu\alpha d\alpha, \quad B_{s\nu} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} B \sin \nu\alpha d\alpha, \tag{7}$$

где $\alpha = \omega t$. Очевидно, что ввиду нелинейности функции (3) каждая из величин B_0, $B_{c\nu}$, $B_{s\nu}$ $(\nu = \overline{1, n})$ зависит от всей совокупности величин H_0, $H_{c\nu}$, $H_{s\nu}$ $(\nu = \overline{1, n})$, т. е.

$$\begin{aligned} B_0 &= B_0 [H_0, H_{c1}, H_{s1}, \ldots, H_{cn}, H_{sn}], \\ B_{c\nu} &= B_{c\nu} [H_0, H_{c1}, H_{s1}, \ldots, H_{cn}, H_{sn}], \\ B_{s\nu} &= B_{s\nu} [H_0, H_{c1}, H_{s1}, \ldots, H_{cn}, H_{sn}]. \end{aligned} \tag{8}$$

Подставив выражения (5), (6) в уравнение (1) и потребовав, чтобы полученное уравнение удовлетворялось для любого момента времени, придем к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2 H_0}{dy^2} = 0, \quad \frac{d^2 H_{c\nu}}{dy^2} = \gamma\nu\omega B_{s\nu}, \quad \frac{d^2 H_{s\nu}}{dy^2} = -\gamma\nu\omega B_{c\nu}. \tag{9}$$

Таким образом, задача сведена к определению амплитуд B_0, $B_{c\nu}$, $B_{s\nu}$ $(\nu = \overline{1, n})$ как функций координаты y, удовлетворяющих системе дифференциальных уравнений (9) и нелинейным зависимостям (8) при граничных условиях

$$\begin{gathered} H_0 [y = b] = H_{\text{г}0}, \quad H_{c\nu} [y = b] = H_{\text{г}c\nu}, \quad H_{s\nu} [y = b] = H_{\text{г}s\nu}, \\ \left.\frac{dH_0}{dy}\right|_{y=b} = 0, \quad \left.\frac{dH_{c\nu}}{dy}\right|_{y=b} = 0, \quad \left.\frac{dH_{s\nu}}{dy}\right|_{y=b} = 0 \quad (\nu = \overline{1, n}). \end{gathered} \tag{10}$$

Образовав $(1 + 2n)$-мерные векторы-столбцы

$$\vec{H}_{\text{г}} = (H_0, H_{c1}, H_{s1}, \ldots, H_{cn}, H_{sn}), \tag{11а}$$

$$\vec{B}_{\text{г}} = (B_0, B_{c1}, B_{s1}, \ldots, B_{cn}, B_{sn}), \tag{11б}$$

запишем систему (8) — (10) в виде

$$\frac{d^2 \vec{H}_{\text{г}}}{dy^2} = \gamma\omega D \vec{B}_{\text{г}}, \tag{12}$$

$$\vec{B}_{\text{г}} = \vec{B}_{\text{г}} [\vec{H}_{\text{г}}], \tag{13}$$

$$\vec{H}_{\text{г}} [y = b] = \vec{H}_{\text{гг}}, \quad \left.\frac{d\vec{H}_{\text{г}}}{dy}\right|_{y=0} = 0. \tag{14}$$

Наложим на интервал $0 \leqslant y \leqslant b$ равномерную сетку, образованную L узлами (включая граничные), и аппроксимируем дифференциальную краевую задачу (12) — (14) конечно-разностной краевой задачей, воспользовавшись разностными формулами четвертого порядка. В результате придем к системе конечно-разностных уравнений

$$
\begin{gathered}
-25\vec{H}_{г1}+48\vec{H}_{г2}-36\vec{H}_{г3}+16\vec{H}_{г4}-3\vec{H}_{г5}=0,\\
11\vec{H}_{г1}-20\vec{H}_{г2}+6\vec{H}_{г3}+4\vec{H}_{г4}-\vec{H}_{г5}=c\gamma\omega D\vec{B}_{г2},\\
-\vec{H}_{г1}+16\vec{H}_{г2}-30\vec{H}_{г3}+16\vec{H}_{г4}-\vec{H}_{г5}=c\gamma\omega D\vec{B}_{г3},\\
-\vec{H}_{г2}-16\vec{H}_{г3}-30\vec{H}_{г4}+16\vec{H}_{г5}-\vec{H}_{г6}=c\gamma\omega D\vec{B}_{г4},\\
\vdots\\
-\vec{H}_{г,L-4}+16\vec{H}_{г,L-3}-30\vec{H}_{г,L-2}+16\vec{H}_{г,L-1}-\vec{H}_{гL}=c\gamma\omega D\vec{B}_{г,L-2},\\
-H_{г,L-4}+4\vec{H}_{г,L-3}+6\vec{H}_{г,L-2}-20\vec{H}_{г,L-1}+11\vec{H}_{гL}=c\gamma\omega D\vec{B}_{г,L-1},\\
\vec{H}_{гL}-\vec{H}_{гг}=0,
\end{gathered}
\tag{15}
$$

$$
\vec{H}_{гl}=\vec{H}_{г}[\vec{B}_{гl}]\quad (l=\overline{1,\ L}),
\tag{16}
$$

где $\vec{H}_{гl}$, $\vec{B}_{гl}$ $(l=\overline{1,\ L})$ — векторы вида (11), составленные для l-го узла сетки по координате y; $c=12(\Delta y)^2$.

Образуем $(1+2n)\,L$-мерные векторы-столбцы

$$
\vec{H}=(\vec{H}_{г1},\ \dots,\ \vec{H}_{гL})_*;\quad \vec{B}=(\vec{B}_{г1},\ \dots,\ \vec{B}_{гL})_*;\quad \vec{H}_{г}=(0,\ \dots,\ 0,\ \vec{H}_{гL})_*
\tag{17}
$$

и $(1+2n)\,L$-мерные квадратные матрицы

$$
C_1=\left|\begin{array}{cccccccccc}
-25E & 48E & -36E & 16E & -3E & & & & & \\
11E & -20E & 6E & 4E & -E & & & & & \\
-E & 16E & -30E & 16E & -E & & & & & \\
 & -E & 16E & -30E & 16E & -E & & & & \\
 & & & \ddots & & & & & & \\
 & & & & & -E & 16E & -30E & 16E & -E \\
 & & & & & -E & 4E & 6E & -20E & 11E \\
 & & & & & & & & & E
\end{array}\right|,
$$

$$
C_2=c\gamma\omega\,\mathrm{diag}\,(0,\ D,\ \dots,\ D,\ 0),
\tag{18}
$$

где E — $(1+2n)$-мерная единичная матрица.

Система (15), (16) с учетом обозначений (17), (18) примет вид

$$
C_1\vec{H}-C_2\vec{B}-\vec{H}_{г}=0,
\tag{19а}
$$

$$
\vec{B}=\vec{B}[\vec{H}].
\tag{19б}
$$

Решим ее итерационным методом Ньютона. Значение вектора $\vec{H}$ на $(i+1)$-й итерации может быть вычислено из линейного уравнения

$$
\left(C_1-C_2\left.\frac{d\vec{B}}{d\vec{H}}\right|_{\vec{H}=\vec{H}_i}\right)(\vec{H}_i-\vec{H}_{i+1})=C_1\vec{H}_i-C_2\vec{B}_i-\vec{H}_{г},
\tag{20}
$$

где в соответствии с формулами (16), (17)

$$
\left.\frac{d\vec{B}}{d\vec{H}}\right|_{\vec{H}=\vec{H}_i}=\mathrm{diag}\left(\left.\frac{d\vec{B}_{г}}{d\vec{H}_{г}}\right|_{\vec{H}_{г}=\vec{H}_{г1i}},\ \dots,\ \left.\frac{d\vec{B}_{г}}{d\vec{H}_{г}}\right|_{\vec{H}_{г}=\vec{H}_{гLi}}\right)=\hat{\mu}.
\tag{21}
$$

Здесь производные вида

$$\left.\frac{d\vec{B}_г}{d\vec{H}_г}\right|_{\vec{H}_г=\vec{H}_{гli}} = \mu_{гli} \tag{22}$$

отражают дифференциальные гармонические магнитные проницаемости ферромагнитного материала в l-м узле сетки, изображаемые $(1 + 2n)$-мерными квадратными матрицами, вычисляемыми при условии, что напряженность магнитного поля изменяется во времени по закону (5), при значениях $H_0 = H_{0li}$, $H_{c\nu} = H_{c\nu li}$, $H_{s\nu} = H_{s\nu li}$, соответствующих i-й итерации.

Выведем формулы для определения матриц вида (22). Для этой цели представим ряд (5) в виде

$$H = \vec{K}[\alpha]\,\vec{H}_г, \tag{23}$$

где $\vec{K}[\alpha] = (1,\ \cos\alpha,\ \sin\alpha,\ \ldots,\ \cos n\alpha,\ \sin n\alpha)$. Вектор $\vec{B}_г$ представим с учетом формул (7), (11б) выражением

$$B_г = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \vec{K}'[\alpha]\,B\,d\alpha. \tag{24}$$

Здесь $\vec{K}'[\alpha] = \left(\frac{1}{2},\ \cos\alpha,\ \sin\alpha,\ \ldots,\ \cos n\alpha,\ \sin n\alpha\right)_*$. Продифференцировав выражение (24) по вектору $\vec{H}_г$, с учетом соотношений (3), (23) получим

$$\mu_г = \frac{d\vec{B}_г}{d\vec{H}_г} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \vec{K}'[\alpha]\,\mu\vec{K}[\alpha]\,d\alpha, \tag{25}$$

где

$$\mu = \frac{dB}{dH} = \mu[H] \tag{26}$$

— дифференциальная магнитная проницаемость материала пластины. Напряженность магнитного поля является периодической функцией координаты $\alpha = \omega t$, поэтому проницаемость μ также является периодической функцией координаты α. Представим ее рядом Фурье

$$\mu[\alpha] = \mu_0 + \sum_{\rho=1}^{\infty}(\mu_{c\rho}\cos\rho\alpha + \mu_{s\rho}\sin\rho\alpha). \tag{27}$$

Подставив выражение (27) в (25) и выполнив интегрирование, найдем

$$\mu_г = \frac{1}{2}\times$$

$$\times\left|\begin{array}{c|c|c|c|c|c}
2\mu_0 & \mu_{c1} & \mu_{s1} & \cdots & \mu_{cn} & \mu_{sn} \\ \hline
2\mu_{c1} & 2\mu_0 + \mu_{c2} & \mu_{s2} & & \mu_{c,n-1} + \mu_{c,n+1} & \mu_{s,n-1} + \mu_{s,n+1} \\ \hline
2\mu_{s1} & \mu_{s2} & 2\mu_0 - \mu_{c2} & & -\mu_{s,n-1} + \mu_{s,n+1} & \mu_{c,n-1} - \mu_{c,n+1} \\ \hline
\vdots & & & & & \\ \hline
2\mu_{cn} & \mu_{c,n-1} + \mu_{c,n+1} & -\mu_{s,n-1} + \mu_{s,n+1} & & 2\mu_0 + \mu_{c,2n} & 2\mu_{s2n} \\ \hline
2\mu_{sn} & \mu_{s,n-1} + \mu_{s,n+1} & \mu_{c,n-1} - \mu_{c,n+1} & & 2\mu_{s2n} & 2\mu_0 - \mu_{c,2n}
\end{array}\right|. \tag{28}$$

Таким образом, матрица $\mu_г$ определяется только через первые $(1 + 2n)$ коэффициентов разложения $\mu[\alpha]$ в ряд Фурье.

Алгоритм определения вектора $\vec{H}$ на $(i + 1)$-й итерации сводится к выполнению следующих операций: а) по найденному на i-й итерации вектору

$\vec{H}$ вычисляются функции $H = H[\alpha]$ на временной сетке K равноудаленных узлов периода T ($K \geqslant 4n + 1$) для всех $y = y_l$ ($l = 1, L$); б) по известной функции $\mu = \mu[H]$ и найденным значениям $H = H[\alpha]$ в узлах временной сетки определяются значения $\mu[\alpha]$ в этих же узлах для всех сечений $y = y_l$; в) по формулам численного гармонического анализа вычисляются первые $1 + 4n$ коэффициентов рядов вида (27) для всех $y = y_l$; г) формируются матрицы $\mu_г$ для всех $y = y_l$; д) формируются матрицы коэффициентов и вектор правых частей уравнения (20); е) уравнение (20) решается относительно вектора $\vec{H}_{i+1}$.

Если при принятом нулевом приближении для вектора $\vec{H}$ итерационный процесс не обнаруживает тенденции к сходимости после 5—6 итераций, то для определения удовлетворительного (под углом зрения сходимости) нулевого приближения следует воспользоваться методом продолжения решения по параметру Параметризованное уравнение (19а) целесообразно составить в виде

$$C_1\vec{H} - C_2\vec{B} - h\vec{H}_г = 0. \qquad (29)$$

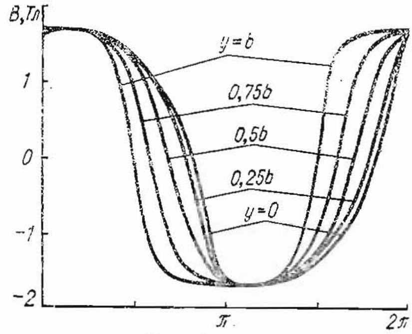

Рис. 2

Продифференцировав его по h, придем к нелинейному векторному дифференциальному уравнению

$$(C_1 - C_2\hat{\mu})\frac{d\vec{H}}{dh} = \vec{H}_г. \qquad (30)$$

Из уравнения (29) очевидно, что при $h = 0$ справедливы равенства $\vec{H} = 0$, $\vec{B} = 0$. Поэтому, интегрируя уравнение (30) численным способом при нулевых начальных условиях в пределах от $h = 0$ до $h = 1$, при $h = 1$ получаем вектор $\vec{H}$, который может быть принят в качестве нулевого приближения для рассмотренной выше итерационной процедуры.

В соответствии с изложенным алгоритмом была составлена программа расчета периодического во времени электромагнитного поля в ферромагнитной пластине. Результаты расчета на ЭВМ ЕС-1060 для пластины толщиной 1,0 мм при $H_г = 800 \cos 314t$ приведены на рис. 2 (материал пластины — электротехническая сталь Э330, $\gamma = 0{,}75 \cdot 10^7$ 1/Ом · м).

1. *Глухивский Л. И.* Алгоритм расчета на ЦВМ бегущей электромагнитной волны в проводящем ферромагнитном слое.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1980, вып. 12, с. 113—118.
2. *Фильц Р. В., Музычка И. М.* Определение эквивалентных характеристик намагничивания слоистой ферромагнитной среды при одномерном периодическом перемагничивании.— Там же, 1983, вып. 18, с. 95—99.

Институт прикладных проблем механики
и математики АН УССР, Львов
Получено 22.02.82

УДК 530.12 : 531.51

Р. М. Пляцко, А. Л. Вынар

ДВИЖЕНИЕ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ПРОБНОГО ТЕЛА В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ИСТОЧНИКА

Согласно работам [2, 3], уравнения Папапетру, описывающие движение вращающегося пробного тела в гравитационном поле, имеют в поле Шварцшильда решения, из которых следует, что тело с ультрарелятивистской скоростью может двигаться по круговым орбитам, плоскость которых не пере-