няется требование

$$\min_{q(\xi,\eta)}\{\max_{(\xi,\eta)\in\omega}|q(\xi,\eta)|\}.$$

Этот пример соответствует условиям задачи 2. Согласно распределению (7)

$$q(\xi,\eta)=l\,\mathrm{sgn}\,C(P_0;\ \xi,\eta),$$

где l определяется уравнением

$$u_3^{(0)}=l\iint_\omega|C(P_0;\ \xi,\eta)|\,d\xi d\eta.$$

Отсюда

$$l=u_3^{(0)}\left\{\iint_\omega|C(P_0;\ \xi,\eta)|\,d\xi d\eta\right\}^{-1},$$

$$q(\xi,\eta)=u_3^{(0)}\,\mathrm{sgn}\,C(P_0;\ \xi,\eta)\left\{\iint_\omega|C(P_0;\ \xi,\eta)|\,d\xi d\eta\right\}^{-1}.$$

Если ω — тот же круг, что и в первом примере, то искомое распределение имеет вид

$$q(\xi,\eta)=2\mu u_3^{(0)}\sqrt{R^2+z_0^2}\,(\sqrt{R^2+z_0^2}-z_0)^{-1}\times$$
$$\times[(3-2\nu)z_0+2(1-\nu)(\sqrt{R^2+z_0^2}-z_0)]^{-1}.$$

1. *Ахиезер Н. И., Крейн М. Г.* О некоторых вопросах теории моментов.— Харьков : Гостехиздат УССР, 1938.— 255 с.
2. *Касьянюк С. А., Ткачук Г. И.* Об одном классе экстремальных задач математической теории упругости.— Прикл. механика, 1971, 7, вып. 9, с. 57—63.
3. *Лурье А. И.* Теория упругости.— М. : Наука, 1970.— 940 с.

Киевский институт инженеров
гражданской авиации

Получено 23.06.82

УДК 536.12—539.376

Е. Г. Грицько

ОБ ОДНОЙ СХЕМЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ЛОКАЛЬНО-НЕОДНОРОДНОГО ТЕЛА

Рассмотрим установившийся теплообмен с внешней средой локально-неоднородного тела, занимающего область G $(\zeta^-<\zeta_i<\zeta^+)$, $i=1, 2, 3$ в ортогональной системе координат $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$. Коэффициент теплопроводности тела $\lambda(\zeta)$ $(\zeta=\langle\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3\rangle)$ принимает постоянные значения λ_1 и λ_0 соответственно в области G_c и вне области $G_c\cup G_g$. Здесь $G_c\subset G$, $G_g\subset G$, $G_c\cap G_g=\varnothing$. В области G_g коэффициент теплопроводности тела зависит от координат и его значения описываются функцией $\lambda_g(\zeta)\equiv\lambda_g(\cdot)$.

Для определения стационарного температурного поля t имеем уравнение теплопроводности

$$\mathrm{div}\,[\lambda(\zeta)\,\mathrm{grad}\,t]=0 \tag{1}$$

и в общем случае следующие граничные условия:

$$\Phi_i^\pm(t,\partial t/\partial\zeta_i)=0\quad\text{при}\quad\zeta_i=\zeta_i^\pm, \tag{2}$$

где

$$\lambda(\zeta)=\lambda_0+(\lambda_1-\lambda_0)\chi_c(\zeta)+[\lambda_g(\zeta)-\lambda_0]\chi_g(\zeta); \tag{3}$$

$\chi_a(\zeta)$ — характеристическая функция области G_a [1].

Допустим, что $\lambda(\cdot) \neq 0$ для всех ζ из G. Тогда уравнение (1) представимо в виде

$$P_0(t) + P_1(t) = 0. \tag{4}$$

Здесь

$$P_0(t) = \operatorname{div} \operatorname{grad} t;$$

$$P_1(t) = (\lambda_1 - \lambda_0)\lambda^{-1}(\cdot)(\operatorname{grad} \chi_c(\cdot), \operatorname{grad} t) +$$
$$+ [\lambda_g(\cdot) - \lambda_0]\lambda^{-1}(\cdot)(\operatorname{grad} \chi_g(\cdot), \operatorname{grad} t) +$$
$$+ \lambda^{-1}(\cdot)\chi_g(\cdot)(\operatorname{grad} \lambda_g(\cdot), \operatorname{grad} t).$$

Пусть оператор $P_0(t)$ и граничные условия (2) такие, что существует преобразование F по двум координатным переменным, за исключением координаты ζ_m, со следующими параметрами:

$$F[f(\zeta)] = f^F(\zeta_m) = f^F, \quad F^{-1}[f^F(\zeta_m)] = f(\zeta),$$
$$F[P_0(t)] = b_2(\zeta_m)\, d^2t^F/d\zeta_m^2 + b_1(\zeta_m)\, dt^F/d\zeta_m + b_0(\zeta_m)\, t^F,$$
$$F[\Phi_m^{\pm}(\cdot, \cdot)] = \Phi_m^{F\pm}(t^F, dt^F/d\zeta_m),$$
$$F[f_1(\zeta) + f_2(\zeta)] = f_1^F(\zeta_m) + f_2^F(\zeta_m),$$

где F^{-1} — обратное преобразование к F.

Применив к выражениям (4), (2) преобразование F, получим

$$\sum_{i=0}^{2} b_i(\zeta_m)\, d^it^F/d\zeta_m^i + F[P_1(t)] = 0, \tag{5}$$

$$\Phi_m^{F\pm}(t^F, \partial t^F/\partial\zeta_m) = 0 \quad \text{при} \quad \zeta_m = \zeta_m^{\pm}. \tag{6}$$

Трудности, возникающие на пути построения решения краевой задачи (5), (6), в первую очередь обусловлены тем, что в операторы уравнения (5) входят как трансформанта температурного поля, так и само t.

Допустим, что известно решение краевой задачи

$$P_0^F(t^F) = \varphi(\zeta_m, p_n),$$
$$\Phi_m^{F\pm}(t^F, \partial t^F/\partial\zeta_m) = 0 \quad \text{при} \quad \zeta_m = \zeta_m^{\pm} \tag{7}$$

и оно имеет вид $t^F = R^F(\zeta_m, p_n)$. Здесь $\varphi(\zeta_m, p_n)$ принадлежит достаточно широкому классу функций, а p_n — параметры, не зависящие от ζ_m ($n = 0, \ldots, N$).

Чтобы упростить уравнение (5), в области G_g представим градиент искомой функции t, входящей во второй оператор этого уравнения, в виде [2—4]

$$\operatorname{grad} t \cong \Psi(\zeta, d_n), \quad \zeta \in G_g,$$

где $\Psi(.,\ .)$ — известная вектор-функция своих аргументов; d_n — неизвестные параметры; запись $A \cong B$ означает A равно либо приближенно равно B.

Заменив grad t в уравнении (5) функцией $\Psi(\zeta, d_n)$, получим

$$\sum_{i=0}^{2} b_i(\zeta_m)\, d^it^{*F}/d\zeta_m^i = \varphi(\zeta_m, d_n). \tag{8}$$

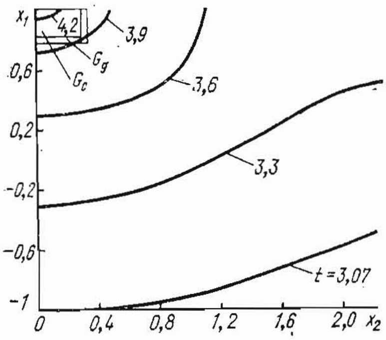
Здесь

$$\varphi(\zeta_m, d_n) = F[(\lambda_1 - \lambda_0)\lambda^{-1}(\cdot)(\operatorname{grad} \chi_c(\cdot), \Psi(\zeta, d_n)) +$$
$$+ [\lambda_g(\cdot) - \lambda_0]\lambda^{-1}(\cdot)(\operatorname{grad} \chi_g(\cdot), \Psi(\zeta, d_n)) +$$
$$+ \lambda^{-1}(\cdot)\chi_g(\cdot)(\operatorname{grad} \lambda_g(\cdot), \Psi(\zeta, d_n))].$$

Решение краевой задачи (8), (6) обозначим t^{*F}. Сравнивая выражения (8), (6) с (7), можно сделать вывод, что t^{*F} имеет вид

$$t^{*F} = R^F(\zeta_m, d_n). \tag{9}$$

Для определения d_n в области G_g аналогично работе [3] вводится множество отображений W_m ($m = 0, \ldots, N$) градиента найденной функции t^{*F} и функции $\Psi(.,.)$ в области действительных чисел таким образом, чтобы результатом воздействий совокупности W_m на grad t^* и $\Psi(.,.)$ было порождение разрешающей системы трансцендентных уравнений относительно d_n.



Общий вид полученной системы следующий:

$$W_m[\mathrm{grad}\, t^*] = W_m[\Psi(\zeta, d_n)],$$
$$n,\ m = 0, \ldots, N.$$

Оценить точность полученного решения можно по поведению величины grad $t^* - \Psi(\zeta, d_n)$ в области G_g.

Для проверки предложенной схемы построения решений задач теплопроводности локально-неоднородных тел рассмотрен установившийся теплообмен с внешней средой прямоугольного параллелепипеда, занимающего в прямоугольных декартовых координатах x_i ($i = 1, 2, 3$) область G ($x_i^- < x < x_i^+$). Граничные поверхности параллелепипеда $x = x_i^\pm$ ($i = 2, 3$) и $x_1 = x_1^+$ вне области Γ ($0 < x_2 < \varepsilon$, $x_3^- < x < x_3^+$) теплоизолированы. Область Γ подвержена воздействию теплового потока $Q(x_2)$. Через поверхность $x_1 = x_1^-$ происходит конвективный теплообмен со средой нулевой температуры. Коэффициенты теплопроводности λ_1 в области G_c ($x_{ic}^- < x_i < x_{ic}^+$) и λ_0 вне области G_0 ($x_{i0}^- < x_i < x_{i0}^+$) постоянны, причем $G_c \subset G_0$, $G_0 \subset G$. В области $G_g = G_0 \setminus G_c$ коэффициент теплопроводности $\lambda_g(x_1, x_2)$ — функция координат со свойствами: $\partial^2\lambda_g(.,.)/\partial x_1 \partial x_2$ — кусочно-постоянная функция в G_g и $\lambda_0 + (\lambda_1 - \lambda_0)\chi_c(\cdot) + [\lambda_g(\cdot) - \lambda_0]\chi_g(\cdot)$ — непрерывная функция в G. Температурное поле t в локально-неоднородном параллелепипеде найдено по изложенной схеме заменой $\partial t/\partial x_1$ и $\partial t/\partial x_2$ в области G_g функциями $d_0 x + d_1$ и $d_2 x_1 + d_3$ соответственно, а коэффициенты d_n определены методом коллокации.

На рисунке представлены изотермы температурного поля при следующих значениях параметров: $x_1^\pm = \pm 1$, $x_2^+ = \pi$, $x_2^- = x_{2c}^- = x_{20}^- = 0$, $x_{1c}^+ = x_{10}^+ = 1$, $x_{1c}^- = 0{,}82$, $\varepsilon = 0{,}3$, $x_{2c}^+ = 0{,}3$, $x_{10}^- = 0{,}78$, $x_{20}^+ = 0{,}34$, $x_{3c}^\pm = x_{30}^\pm = x_3^\pm$, $Q(x_2) \equiv 1$, $\mathrm{Bi} = 0{,}1$, $K_\lambda = 0{,}9$, где Bi — критерий Био с поверхности $x_1 = x_1^-$, $K_\lambda = \lambda_1/\lambda_0$.

1. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики.— М. : Наука, 1971.— 512 с.
2. *Грицько Е. Г.* Смешанная задача теплопроводности для прямоугольного параллелепипеда.— Физика и химия обраб. материалов, 1980, № 6, с. 21—25.
3. *Грицько Е. Г.* Температурные поля тел при локальном изменении коэффициента теплоотдачи : Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Одесса, 1980.— 20 с.
4. *Коляно Ю. М., Грицько Е. Г.* Температурные поля в массивных телах при смешанных граничных условиях.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1977, № 2, с. 132—136.

Институт прикладных проблем механики
и математики АН УССР, Львов

Получено 23.06.82