5. *Лакота Н. А., Рахманов Е. В., Шведов В. Н.* Управление упругим манипулятором на траектории.— Изв. АН СССР. Сер. Техн. кибернетика, 1980, № 2, с. 53—59.
6. *Юдин В. И.* Анализ колебаний стрелы манипулятора.— Прикл. механика, 1980, **16**, № 10, с. 108—115.

Институт прикладных проблем механики
и математики АН УССР, Львов Получено 24.08.82

УДК 539.3

Г. И. Ткачук

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ СИЛОВОЙ НАГРУЗКИ НА ПОВЕРХНОСТИ УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

В настоящей работе для отыскания решения некоторой системы функциональных уравнений

$$L_i(s) = c_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

где $L_i(s)$ — линейные функционалы; c_i — заданные числа, заведомо имеющей не единственное решение, привлекается методика решения некорректных задач [2], состоящая в отыскании решения s при дополнительном условии достижения минимума некоторого так называемого целевого функционала $I(s)$. Это условие позволяет определить из всех решений исходной системы единственное, соответствующее заданному условию. Такое решение будем называть сплайном. Указанная постановка задачи имеет смысл в целом ряде вопросов теории упругости, связанных с необходимостью достижения заданного эффекта с помощью минимальных средств.

Сформулируем и укажем решение двух задач типа (1) применительно к случаю полупространства $z > 0$, находящегося под действием распределенной по некоторой области ω плоскости xOy силы $q(\xi, \eta)$. В этом случае, как известно [3], перемещения любой точки $P(x, y, z)$ рассматриваемого полупространства определяются формулами

$$\begin{aligned} u_1(P) &= \iint_\omega A(P;\ \xi, \eta)\, q(\xi, \eta)\, d\xi d\eta, \\ u_2(P) &= \iint_\omega B(P;\ \xi, \eta)\, q(\xi, \eta)\, d\xi d\eta, \\ u_3(P) &= \iint_\omega C(P;\ \xi, \eta)\, q(\xi, \eta)\, d\xi d\eta, \end{aligned} \tag{2}$$

где

$$A(P;\ \xi, \eta) = \frac{1}{4\pi\mu} \frac{(x-\xi)}{r} \left[\frac{z}{r^2} - \frac{(1-2\nu)}{z+r} \right];$$

$$B(P;\ \xi, \eta) = \frac{1}{4\pi\mu} \frac{(y-\eta)}{r} \left[\frac{z}{r^2} - \frac{(1-2\nu)}{z+r} \right];$$

$$C(P;\ \xi, \eta) = \frac{1}{4\pi\mu} \frac{1}{r} \left[\frac{z^2}{r^2} + 2(1-\nu) \right];$$

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2};$$

μ — упругая постоянная Ляме; ν — коэффициент Пуассона.

Задача 1. Найти такое распределение нагрузки $q(\xi, \eta)$ по ω, которое реализует заданные перемещения $u_1^{(k)}$, $u_2^{(k)}$, $u_3^{(k)}$ в фиксированных точках $P_k(x_k, y_k, z_k)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ полупространства $z > 0$ и минимизирует функционал

$$I(q) = \iint_\omega q^2(\xi, \eta)\, d\xi d\eta. \tag{3}$$

Интенсивность $q(\xi, \eta)$ является искомым сплайном, удовлетворяющим равенствам

$$u_1^{(k)} = \iint_\omega A(P_k;\ \xi, \eta)\, q(\xi, \eta)\, d\xi d\eta,$$

$$u_2^{(k)} = \iint_\omega B(P_k;\ \xi, \eta)\, q(\xi, \eta)\, d\xi d\eta, \tag{4}$$

$$u_3^{(k)} = \iint_\omega C(P_k;\ \xi, \eta)\, q(\xi, \eta)\, d\xi d\eta \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

и обеспечивающим выполнение условия минимума функционала (3).

Из теории l-проблемы моментов [1] известно, что сплайн, реализующий равенства (4), определяется единственным образом соотношением

$$q(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^{n} [\alpha_k A(P_k;\ \xi, \eta) + \beta_k B(P_k;\ \xi, \eta) + \gamma_k C(P_k;\ \xi, \eta)], \tag{5}$$

где коэффициенты α_k, β_k, γ_k находятся из линейной системы

$$u_1^{(r)} = \sum_{k=1} [\alpha_k \varphi_{11}(P_r, P_k) + \beta_k \varphi_{12}(P_r, P_k) + \gamma_k \varphi_{13}(P_r, P_k)],$$

$$u_2^{(r)} = \sum_{k=1}^{n} [\alpha_k \varphi_{22}(P_r, P_k) + \beta_k \varphi_{22}(P_r, P_k) + \gamma_k \varphi_{23}(P_r, P_k)],$$

$$u_3^{(r)} = \sum_{k=1}^{n} [\alpha_k \varphi_{31}(P_r, P_k) + \beta_k \varphi_{32}(P_r, P_k) + \gamma_k \varphi_{33}(P_r, P_k)],$$

причем

$$\varphi_{11}(P_r, P_k) = \iint_\omega A(P_r;\ \xi, \eta)\, A(P_k;\ \xi, \eta)\, d\xi d\eta,$$

$$\varphi_{22}(P_r, P_k) = \iint_\omega B(P_r;\ \xi, \eta)\, B(P_k;\ \xi, \eta)\, d\xi d\eta,$$

$$\varphi_{33}(P_r, P_k) = \iint_\omega C(P_r;\ \xi, \eta)\, C(P_k;\ \xi, \eta)\, d\xi d\eta,$$

$$\varphi_{12}(P_r, P_k) = \iint_\omega A(P_r;\ \xi, \eta)\, B(P_k;\ \xi, \eta)\, d\xi d\eta, \tag{6}$$

$$\varphi_{13}(P_r, P_k) = \iint_\omega A(P_r;\ \xi, \eta)\, C(P_k;\ \xi, \eta)\, d\xi d\eta,$$

$$\varphi_{23}(P_r, P_k) = \iint_\omega B(P_r;\ \xi, \eta)\, C(P_k;\ \xi, \eta)\, d\xi d\eta,$$

$$\varphi_{21}(P_r, P_k) = \varphi_{12}(P_k, P_r); \quad \varphi_{31}(P_r, P_k) = \varphi_{13}(P_k, P_r),$$

$$\varphi_{32}(P_r, P_k) = \varphi_{23}(P_k;\ P_r) \quad (k, r = 1, 2, \ldots, n).$$

Зная сплайн $q(\xi, \eta)$, легко выразить по формулам (2) перемещения u_1, u_2, u_3 в произвольной точке $P(x, y, z)$ полупространства $z > 0$:

$$u_1(P) = \sum_{k=1}^{n} [\alpha_k \varphi_{11}(P, P_k) + \beta_k \varphi_{12}(P, P_k) + \gamma_k \varphi_{13}(P, P_k)],$$

$$u_2(P) = \sum_{k=1}^{n} [\alpha_k \varphi_{22}(P, P_k) + \beta_k \varphi_{22}(P, P_k) + \gamma_k \varphi_{23}(P, P_k)],$$

$$u_3(P) = \sum_{k=1}^{n} [\alpha_k \varphi_{31}(P, P_k) + \beta_k \varphi_{32}(P, P_k) + \gamma_k \varphi_{33}(P, P_k)].$$

Функции $\varphi_{mi}(P, P_k)$ $(m, i = 1, 2, 3)$, вычисляемые по формулам (6), назовем базисными. Эти функции определяются ядрами исходных соотношений (2), областью приложения нагрузки ω, фиксированными точками P_k ($k = 1, 2, \ldots, n$), в которых заданы перемещения u_1, u_2, u_3, и типом сплайна (3). Очевидно, для каждой конкретной задачи строятся свои базисные функции, через которые затем выражаются перемещения в произвольной точке.

Задача 2. Найти распределение силы $q(\xi, \eta)$ по ω, которое реализует заданные перемещения $u_1^{(k)}$, $u_2^{(k)}$, $u_3^{(k)}$ в фиксированных точках P_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) полупространства $z > 0$ и минимизирует функционал

$$I(q) = \max_{(\xi,\eta)\in\omega} |q(\xi, \eta)|.$$

Согласно [1], решением поставленной задачи является только распределение вида

$$q(\xi, \eta) = l\,\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}[\alpha_k A(P_k;\ \xi, \eta) + \beta_k B(P_k;\ \xi, \eta) + \gamma_k C(P_k;\ \xi, \eta)]}{\left|\sum\limits_{k=1}^{n}[\alpha_k A(P_k;\ \xi, \eta) + \beta_k B(P_k;\ \xi, \eta) + \gamma_k C(P_k;\ \xi, \eta)]\right|}, \tag{7}$$

а коэффициенты α_k, β_k, γ_k определяются из системы (4) с $q(\xi, \eta)$ в форме (7).

С помощью сплайна (7) после интегрирования выражений (2) перемещения u_1, u_2, u_3 в произвольной точке полупространства $z > 0$ в данной задаче также выражаются через свои базисные функции, отличные от функций (6). Формулы для базисных функций в этой задаче не приводим из-за их громоздкости.

Рассмотрим иллюстративные примеры.

1. Найдем распределение нагрузки $q(\xi, \eta)$ по области ω плоскости $z = 0$, вызывающее в точке $P_0(x_0, y_0, z_0)$ полупространства $z > 0$ перемещение $u_3 = \overset{0}{u}_3$ и удовлетворяющее требованию

$$\min \iint\limits_{\omega} q^2(\xi, \eta)\, d\xi d\eta.$$

Этот пример соответствует условиям задачи 1. Согласно выражениям (4), (5) получаем

$$u_3^{(0)} = \iint\limits_{\omega} C(P_0;\ \xi, \eta)\, q(\xi, \eta)\, d\xi d\eta, \quad q(\xi, \eta) = \gamma C(P_0;\ \xi, \eta).$$

Следовательно,

$$u_3^{(0)} = \gamma \iint\limits_{\omega} C^2(P_0;\ \xi, \eta)\, d\xi d\eta,$$

откуда

$$\gamma = u_3^{(0)} \left\{\iint\limits_{\omega} C^2(P_0;\ \xi, \eta)\, d\xi d\eta\right\}^{-1},$$

$$q(\xi, \eta) = u_3^{(0)} C(P_0;\ \xi, \eta) \left\{\iint\limits_{\omega} C^2(P_0;\ \xi, \eta)\, d\xi d\eta\right\}^{-1}.$$

Если ω — круг радиуса R с центром в точке (x_0, y_0), то получаем следующий закон распределения нагрузки $q(\xi, \eta)$ по кругу:

$$q(\xi, \eta) = q_0 r_0^{-3}[z_0^2 + 2(1 - \nu) r_0^2],$$

где

$$r_0 = \sqrt{(x_0 - \xi)^2 + (y_0 - \eta)^3 + z_0^2};$$

$$q_0 = 2\mu u_3^{(0)} \left[\frac{R^2(R^2 + 2z_0^2)}{4(R^2 + z_0^2)^2} + 2(1 - \nu)\frac{R^2}{R^2 + z_0^2} + 2(1 - \nu)^2 \ln\left(1 + \frac{R^2}{z_0^2}\right)\right]^{-1}.$$

2. Найдем распределение нагрузки $q(\xi, \eta)$ по кругу ω, при котором в точке $P_0(x_0, y_0, z_0)$ полупространства $z > 0$ перемещение $u_3 = \overset{0}{u}_3$ и выпол-

няется требование

$$\min_{q(\xi,\eta)} \{ \max_{(\xi,\eta)\in\omega} |q(\xi, \eta)| \}.$$

Этот пример соответствует условиям задачи 2. Согласно распределению (7)

$$q(\xi, \eta) = l \operatorname{sgn} C(P_0;\ \xi, \eta),$$

где l определяется уравнением

$$u_3^{(0)} = l \iint_{\omega} |C(P_0;\ \xi, \eta)|\, d\xi d\eta.$$

Отсюда

$$l = u_3^{(0)} \left\{ \iint_{\omega} |C(P_0;\ \xi, \eta)|\, d\xi d\eta \right\}^{-1},$$

$$q(\xi, \eta) = u_3^{(0)} \operatorname{sgn} C(P_0;\ \xi, \eta) \left\{ \iint_{\omega} |C(P_0;\ \xi, \eta)|\, d\xi d\eta \right\}^{-1}.$$

Если ω — тот же круг, что и в первом примере, то искомое распределение имеет вид

$$q(\xi, \eta) = 2\mu u_3^{(0)} \sqrt{R^2 + z_0^2} \left(\sqrt{R^2 + z_0^2} - z_0\right)^{-1} \times$$
$$\times \left[(3 - 2\nu) z_0 + 2(1 - \nu)\left(\sqrt{R^2 + z_0^2} - z_0\right)\right]^{-1}.$$

1. *Ахиезер Н. И., Крейн М. Г.* О некоторых вопросах теории моментов.— Харьков : Гостехиздат УССР, 1938.— 255 с.
2. *Касьянюк С. А., Ткачук Г. И.* Об одном классе экстремальных задач математической теории упругости.— Прикл. механика, 1971, 7, вып. 9, с. 57—63.
3. *Лурье А. И.* Теория упругости.— М. : Наука, 1970.— 940 с.

Киевский институт инженеров
гражданской авиации

Получено 23.06.82

УДК 536.12—539.376

Е. Г. Грицько

ОБ ОДНОЙ СХЕМЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ЛОКАЛЬНО-НЕОДНОРОДНОГО ТЕЛА

Рассмотрим установившийся теплообмен с внешней средой локально-неоднородного тела, занимающего область $G\ (\zeta^- < \zeta_i < \zeta^+)$, $i = 1, 2, 3$ в ортогональной системе координат $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$. Коэффициент теплопроводности тела $\lambda(\zeta)$ $(\zeta = \langle \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3 \rangle)$ принимает постоянные значения λ_1 и λ_0 соответственно в области G_c и вне области $G_c \cup G_g$. Здесь $G_c \subset G$, $G_g \subset G$, $G_c \cap G_g = \varnothing$. В области G_g коэффициент теплопроводности тела зависит от координат и его значения описываются функцией $\lambda_g(\zeta) \equiv \lambda_g(\cdot)$.

Для определения стационарного температурного поля t имеем уравнение теплопроводности

$$\operatorname{div}[\lambda(\zeta) \operatorname{grad} t] = 0 \tag{1}$$

и в общем случае следующие граничные условия:

$$\Phi_i^{\pm}(t, \partial t/\partial \zeta_i) = 0 \quad \text{при} \quad \zeta_i = \zeta_i^{\pm}, \tag{2}$$

где

$$\lambda(\zeta) = \lambda_0 + (\lambda_1 - \lambda_0)\chi_c(\zeta) + [\lambda_g(\zeta) - \lambda_0]\chi_g(\zeta); \tag{3}$$

$\chi_a(\zeta)$ — характеристическая функция области G_a [1].