

В табл. 2 сравниваются частоты  $\lambda_k$ , полученные по формуле (23), с частотами  $\lambda_0$  для бесконечной периодически шарнирно опертой оболочки, взаимодействующей с цилиндрическим слоем жидкости ( $\alpha = 0,5$ ), относительное расстояние между шарнирами в которой постоянно и равно четырем. Частотное уравнение для последнего случая совпадает с дисперсионным уравнением работ [7, 8], в котором необходимо положить  $c = \frac{\lambda l}{\pi l}$  ( $c$  — фазовая скорость). Как следует из результатов табл. 2, различие между частотами при заданных параметрах не превосходит 12 %.

1. Гонткевич В. С. Собственные колебания оболочек в жидкости. — Киев : Наук. думка, 1964. — 104 с.
2. Григолюк Э. И., Горшков А. Г., Шклярчук Ф. Н. Об одном методе расчета колебаний жидкости, частично заполняющей упругую оболочку вращения. — Изв. АН СССР. Сер. Механика жидкости и газа, 1968, № 3, с. 74—80.
3. Ильгамов М. А. Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ. — М. : Наука, 1969. — 184 с.
4. Марчук Р. А., Швец Р. Н. Малые колебания ортотропной цилиндрической оболочки с жидкостью, закрытой жесткими днищами. — Прикл. математика и механика, 1982, 46, вып. 2, с. 310—316.
5. Мнев Е. Н., Перцев А. К. Гидроупругость оболочек. — Л. : Судостроение, 1970. — 365 с.
6. Швец Р. Н., Лунь Е. И. Некоторые вопросы теории термоупругости ортотропных оболочек с учетом инерции вращения и поперечного сдвига. — Прикл. механика, 1971, 7, № 10, с. 121—125.
7. Швец Р. Н., Марчук Р. А. Распространение неосесимметричных упругих волн в ортотропной цилиндрической оболочке, взаимодействующей с жидкостью. — Там же, 1979, 15, № 2, с. 58—64.
8. Швец Р. Н., Марчук Р. А. Колебания ортотропной цилиндрической оболочки типа Тимошенко, соприкасающейся со слоем жидкости. — Мат. методы и физ.-мех. поля, 1975, вып. 1, с. 135—140.
9. Шмаков В. П. Об уравнениях осесимметричных колебаний цилиндрической оболочки с жидким заполнением. — Изв. АН УССР. Сер. Механика и машиностроение, 1964, № 1, с. 170—173.

Хмельницкий технологический институт  
бытового обслуживания

Получено 18.10.82

УДК 534.26 : 539.3

А. П. Поддубняк, А. Р. Волошин

#### ЛОКАЛИЗОВАННОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ ЗВУКОВОГО ПУЧКА НА УПРУГУЮ ЦИЛИНДРИЧЕСКУЮ ОБОЛОЧКУ

Исследование эхо-сигнала от упругой цилиндрической оболочки в акустической среде проводилось в работах [2, 3] для падающего звукового импульса, распространяющегося в жидкости как плоская или цилиндрическая волна. Такие существенные факторы, как сосредоточенность звуковой волны в узком пучке и локальность озвучивания оболочки в течение всей посылки, а также влияние параметров пучка на процесс рассеяния, во внимание не принимались. Ниже эти факторы учтены в предположении, что звуковой пучок идеальный [4].

На тонкую пустую упругую цилиндрическую оболочку кругового сечения ( $R_0$  — радиус срединной поверхности,  $h$  — толщина оболочки, относенная, как и все линейные величины задачи, к радиусу  $R_0$ ,  $\rho_s$  — плотность материала,  $c_{10}$ ,  $c_{20}$  — скорости волн деформации [3]), находящуюся в акустической жидкости ( $c$  — скорость звука,  $\rho$  — плотность), набегающая узконаправленная волна [4]

$$p_i(l, \psi, \tau) = p_* U_-(\psi_0 - |\psi|) \int_0^{\beta} f(\tau - l \operatorname{ch} \varphi) d\varphi, \quad (1)$$

$$\operatorname{ch} \beta = \cos \psi / \cos \psi_0.$$

Озвучивая объект лишь по части его поверхности (дуга  $r = 1, |\theta| \leq \theta_0$ , рис. 1), эта волна рассеивается в окружающей среде, вызывая дополнительное давление — эхо-сигнал

$$p_e(r, \theta, \tau) = p_* \int_{-\infty}^{\tau} f(\tau - \xi) P(r, \theta, \xi) d\xi,$$

$$P(r, \theta, \tau) = \frac{1}{(2\pi)^2 i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{s\tau} ds \int_{-\infty}^{\infty} P^{LF}(r, \alpha, s) e^{i\alpha\theta} d\alpha, \quad (2)$$

где  $P^{LF}$  — преобразование по Лапласу и Фурье безразмерного давления в рассеянной волне

$$P^{LF}(r, \alpha, s) = - \frac{F_\alpha(s) G_\alpha(\theta_0, s) - s G'_\alpha(\theta_0, s)}{F_\alpha(s) K_\alpha(s) - s K'_\alpha(s)} K_\alpha(sr). \quad (3)$$

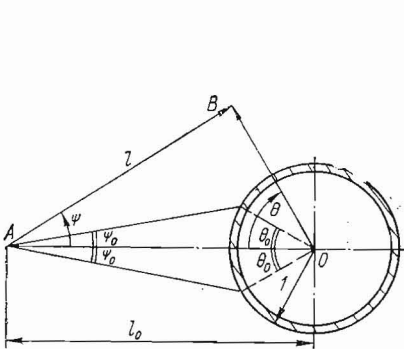


Рис. 1

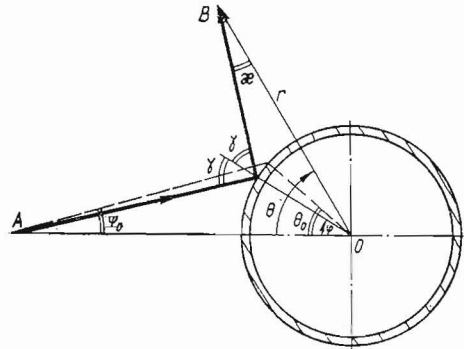


Рис. 2

Здесь  $F_\alpha(s)$  — импедансная функция, полученная в результате решения волнового уравнения для акустической жидкости и уравнений движения упругой оболочки типа Тимошенко при соответствующем удовлетворении граничным условиям и условиям причинности

$$F_\alpha(s) = \frac{s^2 D_2(\alpha, s)}{\xi D_3(\alpha, s)}, \quad \tau_1 = \frac{\rho_s h \lambda^2}{\rho}, \quad \lambda = \frac{c_{10}}{c},$$

$$G_\alpha(\theta_0, s) = \int_{-\theta_0}^{\theta_0} K_0(\beta_1, sl_1) e^{-i\alpha\theta} d\theta, \quad (4)$$

$$G'_\alpha(\theta_0, s) = \frac{1}{i} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \left[ \frac{\partial}{\partial r} K_0(\beta, sl) \right]_{r=1} e^{-i\alpha\theta} d\theta,$$

$$l_1 = l(1, \theta), \quad \beta_1 = \beta(1, \theta).$$

В формулах (1), (3), (4)  $K_\alpha(x)$ ,  $K'_\alpha(x)$  — функции Макдональда и их производные по аргументу,  $K_0(\beta, x)$  — неполная функция Макдональда [1].

С помощью асимптотических разложений Олвера для функции Макдональда [3], справедливых при больших  $s$  и  $\alpha$  ( $|\alpha - is| \geq |\alpha^{1/3}|$ ), асимптотической формулы для  $K_0(\beta, x)$ , полученной по методу перевала [5], и вычисления обратных интегральных преобразований найдем эхо-импульсы, соответствующие отраженной и перензлученной волнам. Для отраженной волны (рис. 2) получаем

$$P(r, \theta, \tau) \equiv P_g \approx \frac{|r \cos(\theta - \theta_1) - 1|}{\sqrt{l_1(\theta_1) l_2^2(\theta - \theta_1)}} \left| \frac{l_0 \sin \theta_1}{l_1(\theta_1)} \frac{r \sin(\theta - \theta_1)}{l_2(\theta - \theta_1)} \right|^{-1} \times$$

$$\times U_-(\theta_0 - |\theta_1|) - 2 \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{F(\gamma)}{\sqrt{l_1(\varphi) l_2(\theta - \varphi)}} e^{-\frac{F(\gamma)}{\cos \gamma} [\tau - \tau_1(r, \theta, \varphi)]} d\varphi, \quad (5)$$

где  $\theta_1$  — корень уравнения  $\tau - \tau_1(r, \theta, \theta_1) = 0$ , а  $\gamma$  — решение уравнения седловой точки  $\gamma + \varphi - \kappa - \theta = 0$ , причем

$$F_\alpha(s) \approx F(\gamma), \tau_1(r, \theta, \varphi) = l_1(\varphi) + l_2(\theta - \varphi), \sin \gamma = \frac{\sin \kappa}{r} = \frac{\alpha}{is}. \quad (6)$$

Первый член в выражении (5) описывает отражение звукового пучка от оболочки как от неподвижного акустически жесткого кругового цилиндра. Интегральное выражение в (5) соответствует упругой реакции оболочки. Эта составляющая тем значительнее, чем тоньше оболочка, и в предельном случае акустически мягкого рассеивателя ( $h = 0$ ) она равна удвоенному значению первого члена с противоположным знаком. Из соотношения (5) следует, что основное количество энергии отраженной волны сосредоточено в секторе  $|\theta_1| \leq \theta_n$  (см. рис. 2).

Определяя по методу перевала [5] асимптотические формулы для  $G_\alpha(\theta_n, s)$ ,  $G'_\alpha(\theta_n, s)$  (4) и используя найденные в работе [2] нули знаменателя (3) (ограничиваемся случаем  $\xi \gg 1$ ), вычисляем по теореме о вычетах эхо-импульсы, соответствующие переизлучению звука безмоментной, изгибной и сдвиговой волнами, распространяющимися в оболочке вдоль ее поверхности. При непопадании краевых лучей пучка в точки возбуждения этих периферических волн  $\gamma_0 \neq \gamma_n$  ( $n = 1, 2, 3$ ) имеем

$$P(r, \theta, \tau) \equiv P_s \approx \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^3 [A_n(r) a_n S_n^0(\tau - \tau_{nk}, d_{nk}) U_+(\gamma_0 - |\gamma_n|) + \\ + \sum_{i=\mp 1} B_n(r) b_n R_n^0(\tau - \tau'_{nk0}, d'_{nk0}) \frac{\cos \gamma_0 + \cos \gamma_n}{\sin \gamma_0 + i \sin \gamma_n}]. \quad (7)$$

При падении краевых лучей под критическим углом возбуждения безмоментной ( $n = 1$ ) или изгибной ( $n = 2$ ) мод, когда  $\sin \gamma_0 = \sin \gamma_{1,2} = \lambda^{-1}$ ,

$$P_s \approx \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{n=1} \sum_{i=\mp 1} \cos \gamma_0 B_n(r) b'_n R_{2+i}(\tau - \tau'_{nk0}, d'_{nk0}) + \right. \\ \left. + B_3(r) \lambda b_3 (\cos \gamma_0 + \cos \gamma_3) \sum_{i=\mp 1} \frac{1}{1 + i\kappa} R_1(\tau - \tau'_{3k0}, 0) e^{-d'_{3k0}} \right]. \quad (8)$$

Если краевые лучи звукового пучка сталкиваются с оболочкой под критическим углом возбуждения сдвиговой волны  $\sin \gamma_0 = \sin \gamma_3 = (\kappa \lambda)^{-1}$ ,  $\kappa = c_{20}/c_{10}$ , то

$$P_s \approx \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{n=1} \sum_{i=\mp 1} B_n(r) \frac{(\cos \gamma_0 + \cos \gamma_n) \lambda \kappa}{1 + i\kappa} R_3(\tau - \tau'_{nk0}, d'_{nk0}) + \right. \\ \left. + B_3(r) \cos \gamma_0 \sum_{i=\mp 1} b_3^i R_0(\tau - \tau_{3k0}, 0) e^{-d'_{3k0}} \right]. \quad (9)$$

В выражениях (7) — (9) введены обозначения:

$$A_n(r) = \frac{\pi}{\sqrt{r l_0 \cos \psi_n \cos \kappa_n}}, \quad B_n(r) = \sqrt{\frac{\pi \cos \gamma_n}{2 l_0 r \cos \kappa_n}}, \\ a_3 = -\frac{2\lambda}{\xi \kappa \cos \gamma_3}, \quad a_2 = \frac{2\kappa^4 \lambda^3}{\xi a^2 (1 - \kappa^2) (1 - \kappa^4) \cos \gamma_2}, \\ a_1 = \frac{2\lambda^3}{\xi (1 - \kappa^2) \cos \gamma_1}, \quad b_n = -\frac{a_n}{2 \cos \gamma_n}, \quad b_1^- = -\frac{4}{\lambda} b_1, \quad b_{1,2}^+ = \lambda b_{1,2}, \quad (10) \\ b_2^- = -\frac{4a^2}{\kappa^2 \lambda} (1 - \kappa^2) b_2, \quad b_3^- = -\frac{4\xi}{\lambda} \cos \gamma_0 b_3, \quad b_3^+ = \kappa \lambda b_3,$$

$$S_{1,2}^0(\tau, x) = S_3(\tau, x), \quad S_3^0(\tau, x) = e^{-x} S_1(\tau, 0),$$

$$R_{1,2}^0(\tau, x) = R_3(\tau, x), \quad R_3^0(\tau, x) = e^{-x} R_1(\tau, 0),$$

$$S_m(\tau, x) = \frac{1}{\tau \sqrt{(x\tau)^{m-1}}} J_{m-1}(2\sqrt{x\tau}) U(\tau),$$

$$R_m(\tau, x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \tau^{m-\frac{1}{2}} \frac{j_{m-1}(2\sqrt{x\tau})}{(\sqrt{x\tau})^{m-1}} U(\tau),$$

$$\tau_{nk} = [r \cos \alpha_n + l_1(\theta_n) - \cos \gamma_n] + d_{nk} | \alpha_n,$$

$$d_{nk} = \alpha_n (\alpha_n - \gamma_n - \theta_n + \theta_k) \sin \gamma_n, \quad \theta_k = \theta + 2k\pi,$$

$$\tau_{nk0}^j = \tau_{nk} |_{\theta_n = j\theta_0}, \quad d_{nk0}^j = d_{nk} |_{\theta_n = j\theta_0},$$

$$\tau_{nk00}^j = \tau_{nk0}^j |_{\gamma_n = \gamma_0}, \quad d_{nk00}^j = d_{nk0}^j |_{\gamma_n = \gamma_0} \quad (n = 1, 2, 3),$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \lambda^2, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2} \frac{\kappa^2 \lambda^2}{a^2 (1 - \kappa^2)}, \quad \alpha_3 = \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{\xi \cos \gamma_3}.$$

В формулах (10)  $j_n(x)$  и  $J_n(x)$  — сферические и цилиндрические функции Бесселя, связь между углами  $\theta_n, \gamma_n, \alpha_n, \psi_n$  следует из рис. 3.

Из полученных результатов (7) — (9) следует, что если звуковой пучок перекрывает все критические точки возбуждения периферических волн, эти волны будут распространяться, как и в случае падения цилиндрической или плоской волн. Влияние локальности озвучивания проявится в том, что кроме указанных волн будут распространяться импульсы со скоростями этих волн и от краев озвученного участка, причем от каждого края по ходу часовой стрелки и против нее. Эти последние импульсы носят второстепенный характер (на рис. 3 они не показаны).

Вклад от периферических волн будет наиболее существен в случае совпадения развертки падающего пучка с разверткой, соответствующей возбуждению этих мод. Это своеобразное явление пространственного резонанса позволяет селективировать отдельные периферические эхо-импульсы и тем самым идентифицировать волновые свойства оболочки.

Используя для  $K_\alpha(s)$  и  $K'_\alpha(s)$  асимптотические разложения Лангера [3], для  $K_\alpha(sr)$  — разложения Олвера, а также вычисляя  $G_\alpha(\theta_0, s)$  и  $G'_\alpha(\theta_0, s)$  по методу перевала, после обращения фурье- и лаплас-трансформант получаем эхо-импульсы, излученные дифрагированными волнами (типа Франца [7]):

$$P(r, \theta, \tau) \equiv P_d \approx \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=\pm 1} \sum_{m=0}^1 A_{nij}(r) a_m U_m(\alpha_{nkj}, \tau - \tau_{kj}), \quad (11)$$

где

$$A_{nij}(r) = - \frac{1}{2 \sqrt{l_{10}} \sqrt{r^2 - 1} (\sin \theta_0 + j) q'_n A_i(q'_n)};$$

$$a_0 = 1; \quad a_1 = \frac{1}{\xi (\kappa^2 - \lambda^2)}; \quad \tau_{kj} = l_{10} + \sqrt{r^2 - 1} + \theta_{kj}(r, \theta);$$

$$\alpha_{nkj} = 2^{-1/2} g'_n \theta_{kj}(r, \theta); \quad \theta_{kj}(r, \theta) = \theta_k + j\theta_0 - \arccos \frac{1}{r}.$$

В приведенных формулах  $U_m(\alpha, \tau)$  — функция, использованная Фридендером [6], а  $q'_n$  — нули производной функции Эйри. Дифрагированные волны (11) имеют структуру, аналогичную описанной в работе [4].

Анализ волновых полей при рассеянии звукового пучка на предельно тонкой оболочке ( $\xi \ll 1$ ) показывает, что в этом случае сдвиговая волна

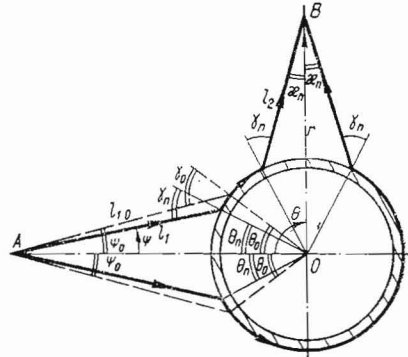


Рис. 3

существенного вклада в эхо-сигнал не создает. Поэтому в выражении (7) члены с  $n = 3$  не учитываются. В оставшейся части необходимо изменить значения  $a_n$  на

$$a_1 = \frac{2\xi}{\lambda} (1 - \kappa^2), \quad a_2 = \frac{2\xi\kappa^4}{a^2 (1 + \kappa^2)}.$$

Кроме того, следует положить  $S_n^0(\tau, x) = S_1^0(\tau, x)$ ,  $R_n^0(\tau, x) = R_1^0(\tau, x)$  ( $n = 1, 2$ ). Это касается также формулы (8), где  $R_3^0(\tau, x)$  следует заменить на  $R_1^0(\tau, x)$ . Естественно, что в этих условиях случай (9) выпадает из рассмотрения.

Аналогично в описании дифракционных эхо-импульсов (11) следует положить

$$A_{ni}(r) = \frac{(\kappa^2 - \lambda^2) \xi}{2^{2/3} A'(q_n) \sqrt{l_{10}} \sqrt{r^2 - 1}},$$

где  $q_n$  — нули функции Эйри [7], а вместо функции  $U_m(\alpha, \tau)$  взять функцию  $U_{m+\frac{1}{2}}(\alpha, \tau)$ .

Суммируя все полученные эхо-импульсы, возбужденные падающим ограниченным пучком цилиндрических волн при  $f(\tau) = \delta(\tau)$ , и подставляя результат в формулу (2), получаем полный эхо-сигнал при любом заполнении посылки  $f(\tau)$  в виде свертки.

1. Агрест М. М., Максимов М. З. Теория неполных цилиндрических функций и их приложения. — М.: Атомиздат, 1965. — 351 с.
2. Векслер Н. Д., Кутсер М. Э. Асимптотика поля давления в определенном скачке при дифракции плоской акустической волны на упругой цилиндрической оболочке. — Прикл. математика и механика, 1976, 40, № 3, с. 509—519.
3. Метсавэр Я. А., Векслер Н. Д., Стулов А. С. Дифракция акустических импульсов на упругих телах. — М.: Наука, 1979. — 239 с.
4. Поддубняк А. П. Рассеяние ограниченного звукового пучка на акустически мягком круговом цилиндре. — Акуст. журн., 1979, 25, № 1, с. 108—112.
5. Федорюк М. В. Метод перевала. — М.: Наука, 1977. — 368 с.
6. Фридлиндер Ф. Звуковые импульсы. — М.: Изд-во иностр. лит., 1962. — 232 с.
7. Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции. — М.: Мир, 1964. — 428 с.

Институт прикладных проблем механики  
и математики АН УССР, Львов

Получено 16.11.82

УДК 539.3 : 534.26

Е. А. Вдович

#### ОПТИМИЗАЦИЯ ИМПУЛЬСА ЗВУКОВОЙ ВОЛНЫ, ПАДАЮЩЕЙ НА УПРУГОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО С АКУСТИЧЕСКИМ НАПОЛНИТЕЛЕМ

Рассмотрим упругое полупространство, контактирующее по границе  $z = E + H$  с акустической средой (среда 1). На расстоянии  $z = H$  от границы контакта в упругом полупространстве находится слой (среда 3) толщины  $E$ , заполненный вязкой сжимаемой жидкостью. Предполагаем, что на полупространство набегают зондирующий импульс продолжительности  $t_1$ , возбужденный сосредоточенными силами вида  $\vec{F} = \left\{ 0, 0, k_0 f(t) \frac{d}{dz} \delta(z - z_0) \right\}$ , размещенными в среде 1 на расстоянии  $z = z_0$  ( $z_0 \geq E + H$ ).

Задача определения волн, отраженных от границ раздела рассматриваемых сред, сводится к решению системы волновых уравнений

$$\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial \xi^2} - \chi_i^2 \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial \tau^2} = n_0 f_i(\tau) \delta(\xi - \xi_0) \quad (i = \bar{1}, 4) \quad (1)$$

при нулевых начальных условиях, условиях затухания на бесконечности и условиях равенства нормальных перемещений и давлений на границах