УДК 621.315 : 592.2

В. И. Зарецкий, М. С. Михайлишин, А. Г. Полищук, О. Н. Шаблий

ОБ УРАВНЕНИЯХ ТЕРМОХИМИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ СПЛОШНЫХ СРЕД

Основы термодинамики сплошных сред с учетом полей различной природы изложены в работах [1—8], а для многокомпонентных — в работах [1—4, 6]. В данной статье учтено ускорение компонент относительно центра масс элементов среды, тем самым уточнены уравнения баланса энергий и энтропии, а также феноменологические соотношения. Следует отметить, что последние приняты в операторной форме.

Пусть сплошная среда состоит из n компонент, между которыми протекают химические реакции. При этом уравнение баланса массы k-й компоненты имеет вид [2, 3]

$$\rho \frac{dc_k}{dt} = - I^i_{(k),i} + \sum_{j=1}^{r} \nu_{kj} J_j, \tag{1}$$

где $\rho = \sum\limits_{k=1}^{r} \rho_{(k)}$, $c_k = \rho_{(k)}/\rho$; $\rho_{(k)}$, c_k — плотность и концентрация k-й компоненты континуума; $I^i_{(k)} = \rho_{(k)} w^i_{(k)}$, ν_{kj}, J_j — соответственно массовый поток k-й компоненты, стехиометрические коэффициенты и скорость химической реакции; $w^i_{(k)} = v^i_{(k)} - v^i$, $v_{(k)}$ — относительная и абсолютная скорости k-й компоненты; v^i — скорость центра масс элемента среды.

Просуммировав уравнение (1) по всем компонентам, получим уравнение баланса массы для среды в целом:

$$\frac{d\rho}{dt} = - \rho v^i_{,i}. \tag{2}$$

Уравнение баланса импульса k-й компоненты среды следующее [3]:

$$\rho_{(k)} \frac{d^k v^i_{(k)}}{dt} = - P^{ij}_{(k),j} + \rho_k F^i_{(k)}, \tag{3}$$

где $\frac{d^k}{dt}$ — оператор субстанциональной производной для k-й компоненты; $P^{ij}_{(k)}$, $F^i_{(k)}$ — тензор давления и массовая сила k-й компоненты.

С помощью уравнения (3) получаем уравнение баланса импульса для среды

$$\rho \frac{dv^i}{dt} = \sigma^{ij}_{,j} + \sum_{k=1}^{n} \rho_{(k)} F^i_{(k)}, \tag{4}$$

в котором введены обозначения для напряжений

$$\sigma^{ij} = - \sum_{k=1}^{n} [P^{ij}_{(k)} + \rho_{(k)} w^i_{(k)} w^j_{(k)}].$$

Умножая формулу (3) на $v^i_{(k)}$ и используя выражение субстанциональной производной, после соответствующих преобразований получаем уравнение баланса кинетической энергии k континуума

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_{(k)} \frac{v^i_{(k)} v_{(k)i}}{2}\right) = \left[\left(\frac{1}{2} \rho_{(k)} v^i_{(k)} v^j_{(k)} + P^{ij}_{(k)}\right) v_{(k)i}\right]_{,j} +$$

$$+ P^{ij}_{(k)} v_{(k)i,j} + \frac{1}{2} v_{(k)i} v^i_{(k)} \sum_{s=1}^{r} \nu_{ks} J_s + \rho_{(k)} v_{(k)i} F^i_{(k)}. \tag{5}$$

Просуммировав последнее выражение по всем компонентам рассматриваемой среды, получим уравнение баланса кинетической энергии n-компонентной среды:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}\rho v_i v^i + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\rho_{(k)} w^i_{(k)} w_{(k)i}\right] = -\left\{\left[\frac{1}{2}\rho v^i v^j + \right.\right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{n}\left(\rho_{(k)} w^i_{(k)} w^j_{(k)} + P^{ij}_{(k)}\right)\right] v_i + \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}\rho_{(k)} w^i_{(k)} w_{(k)i}\right) v^j +$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{n}\left(\rho_{(k)} w^i_{(k)} w^j_{(k)} + P^{ij}_{(k)}\right) w_{(k)i}\right\} + \sum_{k=1}^{n}\left[\left(\rho_{(k)} w^i_{(k)} w^j_{(k)} + P^{ij}_{(k)} - \rho_{(k)} w^i_{(k)} w^j_{(k)}\right] v_{i,j} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} P^{ij}_{(k)} w_{(k)i,j} + \sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{r}\left(v_i w^i_{(k)} + \frac{1}{2} w_{(k)i} w^i_{(k)}\right)\nu_{ks} J_s +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n}\rho_{(k)} F^i_{(k)}\left(v_i + w_{(k)i}\right). \tag{6}$$

Это уравнение отличается от известных в литературе тем, что в нем учтено движение компонент относительно центров масс элементов среды [2, 3].

Считаем, что массовые силы имеют потенциал $\Psi_{(k)}$, не зависящий от времени. Тогда

$$F^i_{(k)} = -\Psi_{(k),i}, \quad \frac{\partial \Psi_{(k)}}{\partial t} = 0. \tag{7}$$

Умножая уравнение баланса k-й компоненты на $\Psi_{(k)}$ и суммируя, получаем уравнение баланса потенциальной энергии

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Psi\rho) = -\left(\Psi\rho v^i + \sum_{k=1}^{n}\Psi_{(k)} I^i_{(k)}\right)_{,i} - v_i\sum_{k=1}^{n}\rho_{(k)} F^i_{(k)} -$$

$$- \sum_{k=1}^{n}\rho_{(k)} w_{(k)i} F^i_{(k)} + \sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{r}\Psi_{(k)}\nu_{ks} J_s,$$

$$\rho\Psi = \sum_{k=1}^{n}\rho_{(k)}\Psi_{(k)}. \tag{8}$$

Складывая кинетическую, потенциальную и внутреннюю энергии, находим полную энергию среды e в виде

$$\rho e = \frac{1}{2}\rho v_i v^i + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\rho_{(k)} w^i_{(k)} + \Psi\rho + U\rho, \tag{9}$$

где U — внутренняя энергия среды. Поток полной энергии определяется по формуле

$$I^j_e = \left(\frac{1}{2}\rho v_i v^i + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\rho_{(k)} w^i_{(k)} w_{(k)i} + \rho\Psi + \rho U\right) v^j - \sigma^{ij} v_i +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n}\left(\rho_{(k)} w^i_{(k)} w^j_{(k)} + P^{ij}_{(k)}\right) w_{(k)i} + \sum_{k=1}^{n}\left(\Psi_{(k)} + \mu_k\right) I^j_{(k)} + I^j_q, \tag{10}$$

в которой первое слагаемое — конвективная часть потока,

$$-\sigma^{ij} v_i + \sum_{k=1}^{n}\left(\rho_{(k)} w^i_{(k)} w^j_{(k)} + P^{ij}_{(k)}\right) w_{(k)i},$$

I^j_q, $\sum_{k=1}^{n}(\Psi_{(k)} + \mu_k) I^j_{(k)}$ — потоки соответственно механической и потенциальной энергий, поток тепла, а также поток, возникающий вследствие массового и химического потенциалов. Тогда закон сохранения полной энергии примет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e) = -I^j_{e,j}. \tag{11}$$

Используя формулы (6), (8) — (11), находим уравнение баланса внутренней энергии

$$\rho \frac{dU}{dt} = -\left\{ I^j_c + \sum_{k=1}^{n-1} \tilde{\mu}_k I^j_{(k)} \right\}_{,j} + (\sigma^{ij} + \tilde{\sigma}^{ij}) \varepsilon_{ij} + \sum_{k=1}^{n} \sigma^{ij}_{(k)} \dot{\varepsilon}^r_{(k)ij} -$$

$$- \sum_{k=1}^{n} \sum_{s=1}^{r} \left(\Psi_{(k)} + v_i w^i_{(k)} + \frac{1}{2} w_{(k)i} w^i_{(k)} \right) \nu_{ks} J_s. \qquad (12)$$

Здесь введены следующие обозначения для тензоров скоростей деформаций ε_{ij}, $\dot{\varepsilon}^r_{(k)ij}$, химического потенциала $\tilde{\mu}_k$, тензоров напряжений, возникающих вследствие относительного движения компонент среды и тензора напряжений для k-й компоненты:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i}), \quad \dot{\varepsilon}^r_{(k)ij} = \frac{1}{2} (w_{(k)i,j} + w_{(k)j,i}),$$

$$\tilde{\mu}_k = \mu_k - \mu_n, \quad \tilde{\sigma}_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \rho_{(k)} w_{(k)i} w_{(k)j}, \quad \sigma^{ij}_{(k)} = - P^{ij}_{(k)}. \qquad (13)$$

В формуле (12) ε_{ij}, $\varepsilon^r_{(k)ij}$ обозначают соответственно скорости деформаций континуума вследствие перемещений центров масс элементов и перемещений компонент относительно этих центров.

Тензоры скоростей деформаций представим в виде суммы обратимых (с индексами e, re) и необратимых (со звездочкой) частей

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon^e_{ij} + \varepsilon^*_{ij}, \quad \dot{\varepsilon}^r_{(k)ij} = \dot{\varepsilon}^{re}_{(k)ij} + \dot{\varepsilon}^{r*}_{(k)ij}. \qquad (14)$$

Формула Гиббса в рассматриваемом случае имеет вид

$$\frac{dU}{dt} = T \frac{dS}{dt} + \frac{1}{\rho} (\sigma^{ij} + \tilde{\sigma}^{ij}) \varepsilon^e_{ij} + \frac{1}{\rho} \sum_{k=1}^{n} \sigma^{ij}_{(k)} \dot{\varepsilon}^{re}_{(k)ij} + \sum_{k=1}^{n-1} \tilde{\mu}_k \frac{dc_k}{dt}. \qquad (15)$$

Подставляя уравнение баланса массы (1) и внутренней энергии (2) в (15), получаем уравнение баланса энтропии

$$\rho \frac{dS}{dt} = -\left\{ \frac{I^j_q}{T} \right\}_{,j} + \frac{1}{T} \left\{ (S^{ij} + \tilde{S}^{ij}) \dot{e}^*_{ij} + \sum_{k=1}^{n} S^{ij}_{(k)} \dot{\varepsilon}^{r*}_{(k)ij} - \right.$$

$$- I^i_q \frac{T_{,i}}{T} + (\sigma + \tilde{\sigma}) \dot{\varepsilon}^{*p}_p + \sum_{k=1}^{n} \sigma_{(k)} \dot{\varepsilon}^{r*p}_{(k)p} -$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{n} \sum_{s=1}^{r} \left(\Psi_{(k)} + \tilde{\mu}_k + v_i w^i_{(k)} + \frac{1}{2} w^i_{(k)} w_{(k)i} \right) \nu_{ks} J_s \right\}. \qquad (16)$$

Здесь $\sigma = \frac{1}{3} \sigma^i_i$; $\tilde{\sigma} = \frac{1}{3} \tilde{\sigma}^i_i$; $\sigma_{(k)} = \frac{1}{3} \sigma^i_{(k)i}$; $\chi^{\cdots p}_{\cdots p} = \sum_{p} \chi^{\cdots p}_{\cdots p}$;

$$S^{ij} = \sigma^{ij} - \sigma \delta^{ij}; \quad \tilde{S}^{ij} = \tilde{\sigma}^{ij} - \tilde{\sigma} \delta^{ij}; \quad S^{ij}_{(k)} = \sigma^{ij}_{(k)} - \sigma_{(k)} \delta^{ij}. \qquad (17)$$

Введем термодинамический потенциал

$$F = U - TS. \qquad (18)$$

Применяя преобразование Лежандра, получаем уравнение Гиббса для свободной энергии

$$\frac{dF}{dt} = \frac{1}{\rho} (\sigma^{ij} + \tilde{\sigma}^{ij}) \dot{\varepsilon}^e_{ij} + \frac{1}{\rho} \sum_{k=1}^{n} \sigma^{ij}_{(k)} \dot{\varepsilon}^{re}_{(k)ij} + \sum_{k=1}^{n-1} \tilde{\mu}_k \dot{c}_k - S\dot{T}. \qquad (19)$$

Для построения феноменологических соотношений между обобщенными термодинамическими силами и потоками будем исходить из уравнений (16), (19). В линейной дифференциальной форме они имеют вид

$$\dot{\sigma}^{ij} + \dot{\tilde{\sigma}}^{ij} = C^{ijps} \dot{\varepsilon}^e_{ps} + \sum_{k=1}^{n} C^{ijps}_{(k)} \dot{\varepsilon}^{re}_{(k)ps} - K \left(\alpha_* \dot{T} + \sum_{k=1}^{n-1} \beta_k \dot{c}_k \right) \delta^{ij},$$

$$\dot{\sigma}^{ij}_{(k)} = C^{ijps}_{(k)}\dot{\varepsilon}^{e}_{ps} + \sum_{l=1}^{n} C^{ijps}_{(kl)}\dot{\varepsilon}^{re}_{(l)ps} - K_{(kk)}\left(\alpha_k \dot{T} + \sum_{l=1}^{n-1}\beta_{lk}c_l\right)\delta^{ij},$$

$$\tilde{\mu}_k = d_k T - \frac{1}{\rho}\beta_k K\varepsilon^{ei}_i - \frac{1}{\rho}\sum_{l=1}^{n}\beta_{kl}K_{(ll)}\varepsilon^{rei}_{(l)i} + \sum_{l=1}^{n-1} d_{kl}c_l,$$

$$S = \frac{1}{T_0}CT + \frac{1}{\rho}K\alpha_*\varepsilon^{ei}_i + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\rho}K_{(kk)}\alpha_k\varepsilon^{rei}_{(k)i} - \sum_{k=1}^{n} d_k c_k, \tag{20}$$

где функции в правых частях соотношений обеспечивают полный дифференциал потенциала F.

Связи между термодинамическими силами и скоростями изменения сопряженных величин для изотропной среды на основании принципа Кюри в операторной форме будут такими:

$$\varepsilon^{*p}_{p} = U^*_{ss}[\sigma + \tilde{\sigma}] + \sum_{k=1}^{n} U^*_{sk}[\sigma_{(k)}] + \sum_{j=1}^{r} U^*_{zj}[A_j],$$

$$J_j = U^*_{jz}[\sigma + \tilde{\sigma}] + \sum_{k=1}^{n}\tilde{U}^*_{jk}[\sigma_{(k)}] + \sum_{i=1}^{r}\tilde{\tilde{U}}^*_{ij}[A_i],$$

$$\dot{\varepsilon}^{r*p}_{(k)p} = U^*_{ks}[\sigma + \tilde{\sigma}] + \sum_{m=1}^{n} U^*_{mk}[\sigma_{(m)}] + \sum_{j=1}^{r}\tilde{U}^*_{kj}[A_j],$$

$$I_{(q)i} = L^*_{qq}[X_{(q)i}] + \sum_{k=1}^{n-1} L^*_{qk}[X_{(k)i}],$$

$$I_{(k)i} = L^*_{kq}[X_{(q)i}] + \sum_{k=1}^{n} P^*_{sk}[S^k_{ij}],$$

$$\dot{e}^*_{ij} = P^*_{ss}[S_{ij} + \tilde{S}_{ij}] + \sum_{k=1}^{n} P^*_{sk}[S^k_{ij}], \tag{21}$$

$$\dot{e}^{r*}_{(k)ij} = P^*_{ks}[S_{ij} + \tilde{S}_{ij}] + \sum_{m=1}^{n} P^*_{mk}[S^m_{ij}],$$

где U, L, P^* с соответствующими индексами — операторы, которые действуют на произвольную функцию z в соответствии с формулой [4]

$$L^*[z] = \int_{-\infty}^{t}\int_V L(t' - t, X, X')\, z(X', t')\, dV'dt. \tag{22}$$

Для них в обобщенном смысле справедливы соотношения взаимности Онзагера [2—4].

Химическое сходство реакции A_j и термодинамические силы $X_{q(i}$ и $X_{(k.i}$ связаны соотношениями

$$A_j = -\sum_{k=1}^{n}\left(\Psi_{(k)} + \tilde{\mu}_k + v_i w^i_{(k)} + \frac{1}{2}w_{(k)i}w^i_{(k)}\right)\nu_{kj},$$

$$X_{(q)i} = -\frac{T_{,i}}{T}, \quad X_{(k)i} = -\tilde{\mu}_{k,i}. \tag{23}$$

С помощью формул (13), (14), (20) и (21) находим

$$\varepsilon^p_{(k)p} = \frac{1}{\rho^2_{(k)}}(\rho_{(k)}I^i_{(k),i} - I^i_{(k)}\rho_{(k),i}),$$

$$e_{(k)ij} = \frac{1}{2\rho^2_{(k)}}[\rho_{(k)}(I_{(k)i,j} + I_{(k)j,i}) - (\rho_{(k),j}I_{(k)i} + \rho_{(k),i}I_{(k)j})] -$$

$$-\frac{1}{3\rho^2_{(k)}}(\rho_{(k)}I^i_{(k),i} - \rho_{(k),i}I^i_{(k)})\,\delta_{ij},$$

$$\tilde{\sigma} = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\rho_{(k)}} I^{i}_{(k)} I_{(k)i},$$

$$\tilde{S}_{ij} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\rho_{(k)}}\left[I_{(k)i} I_{(k)j} - \frac{1}{3} I_{(k)p} I^{p}_{(k)}\delta_{ij}\right],$$

$$\sigma_{(k)} = \sum_{m=1}^{n}\int_{0}^{t} Q_{(km)}(t, \tau)\, \text{Э}_{m}(\tau)\, d\tau,$$

$$S_{(k)ij} = \sum_{m=1}^{n}\int_{0}^{t} \Gamma_{(km)}(t, \tau)\, \text{Э}_{m}(\tau)\, d\tau, \tag{24}$$

где

$$\text{Э}_{k} = \frac{1}{\rho^{2}_{(k)}}\Big\{[\rho_{(k)} I^{i}_{(k),i} - I^{i}_{(k)}\rho_{(k),i}] - [U^{*}_{ks}[\sigma]] +$$

$$+ U^{*}_{ks}\left[\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\rho_{(k)}} I^{i}_{(k)} I_{(k)i}\right] + T_{k}\sigma + T_{k}\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\rho_{(k)}} I^{i}_{(k)} I_{(k)i}\right] +$$

$$+ \sum_{j=1}^{r} U^{*}_{kj}[A_{j}] + \tilde{\eta}_{k} T + \sum_{m=1}^{n-1}\tilde{d}_{km} c_{m}\Big\}; \tag{25}$$

$$\text{Э}_{kij} = \frac{1}{2\rho^{2}_{(k)}}[\rho_{(k)}(I_{(k)i,j} + I_{(k)j,i}) - (\rho_{(k),j} I_{(k)i} + \rho_{(k),i} I_{(k)j})] -$$

$$- \frac{1}{3\rho^{2}_{(k)}}(\rho_{(k)} I^{i}_{(k),i} - \rho_{(k),i} I^{i}_{(k)})\,\delta_{ij} - \Big\{P^{*}_{ks}[S_{ij}] +$$

$$+ P^{*}_{ks}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\rho_{(k)}}\left(I_{(k)i} I_{(k)j} - \frac{1}{3} I^{p}_{(k)} I_{(k)p}\delta_{ij}\right)\right] +$$

$$+ M_{(k)} S_{ij} + M_{(k)}\frac{d}{dt}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\rho_{(k)}}\left(I_{(k)i} I_{(k)j} - \frac{1}{3} I^{p}_{(k)} I_{(k)p}\delta_{ij}\right)\right].$$

Исключив в уравнениях (20), (21) относительные скорости деформаций $\dot{\varepsilon}^{rp}_{(k)p}$, $\dot{e}^{r}_{(k)ij}$ и напряжения $\tilde{\sigma}$, $\tilde{S}_{ij}$, $\sigma_{(k)}$, $S_{(k)ij}$, а также решив первое из уравнений (20) относительно скоростей деформаций, получим

$$e_{ij} = M_{(ss)} S_{ij} + P^{*}_{ss}[S_{ij}] + \sum_{k=1}\Big\{P^{*}_{ss}\left[\frac{1}{\rho_{(k)}}\left(I_{(k)i} I_{(k)j} - \frac{1}{3} I^{p}_{(k)} I_{(k)p}\delta_{ij}\right)\right] +$$

$$+ M_{(ss)}\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\rho_{(k)}}\left(I_{(k)i} I_{(k)j} - \frac{1}{3} I^{p}_{(k)} I_{(k)p}\delta_{ij}\right)\right]\Big\} +$$

$$+ \sum_{m,k=1}^{n}\left\{P^{*}_{sk}\left[\int_{0}^{t}\Gamma_{(km)}(t, \tau)\,\text{Э}_{(m)ij}(\tau)\, d\tau + M_{(k)}\frac{d}{dt}\int_{0}^{t}\Gamma_{(km)}(t, \tau)\,\text{Э}_{(m)ij}(\tau)\, d\tau\right]\right\},$$

$$\varepsilon^{i}_{i} = T_{(\sigma\sigma)}\sigma + U^{*}_{ss}[\sigma] + \tilde{\eta} T + \sum_{k=1}^{n-1}\tilde{d}_{k} c_{k} + \sum_{j=1}^{r} U^{*}_{zj}[A_{j}] +$$

$$+ \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left\{U^{*}_{ss}\left[\frac{1}{\rho_{(k)}} I^{i}_{(k)} I_{(k)i}\right] + T_{(\sigma\sigma)}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho_{(k)}} I^{i}_{(k)} I_{(k)i}\right)\right\} +$$

$$+ \sum_{m,k=1}^{n}\Big\{U^{*}_{sk}\left[\int_{0}^{t} Q_{(km)}(t, \tau)\,\text{Э}_{(m)}(\tau)\, d\tau\right] +$$

$$+ T_{(k)}\frac{d}{dt}\int_{0}^{t} Q_{(km)}(t, \tau)\,\text{Э}_{(m)}(\tau)\, d\tau\Big\}. \tag{26}$$

Следует отметить, что записанные феноменологические соотношения могут быть применены для твердого тела, жидкости или газа в случае гомогенных процессов.

С помощью уравнений баланса энтропии (16) и соотношений (26) находим уравнение теплопроводности в виде

$$\rho\left(\frac{C}{T_0}+a_3\right)\mathring{T}-\frac{d}{dt}\int_0^t R(t,\tau)\,T(\tau)\,d\tau+K\alpha\varepsilon_{p}^{ep}+$$

$$+\rho a_1\sigma-\rho\sum_{k=1}^{n-1}\left(d_k+\frac{q_k}{T}-a_{4k}\right)c_k+\rho a_2\sum_{k=1}^{n}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho_k}I^{i}_{(k)}I_{(k)i}+\right.$$

$$+\sum_{m=1}^{n}\frac{d}{dt}\int_0^t \Phi_m(t,\tau)\,\vartheta_m(\tau)\,d\tau=\frac{1}{T}\{\hat{X}[T_{,}^{i}]\}_{,i}+\sigma_0, \qquad (27)$$

где σ_0 — производство энтропии.

Отметим, что соответствующим выбором ядер релаксации может быть учтена конечная скорость распространения тепла.

Подставляя в уравнение баланса массы (1) выражение для диффузионного потока из феноменологических соотношений, получаем уравнение диффузии в виде

$$\frac{dc_k}{dt}=\left\{\hat{D}_k^T[T_{,}^{i}]+\sum_{l=1}^{n-1}\hat{D}_{kl}[C_{l,}^{i}]+\hat{D}_k^{i}[(\varepsilon_p^{ep})_{,}^{i}]+\right.$$

$$+\hat{D}_k^{\sigma}[\sigma_{,}^{i}]+\sum_{s=1}^{n}\hat{D}^{i}_{(ks)}\left[\left\{\frac{1}{\rho_s}I_s^{p}I_{(s)p}\right\}_{,}^{i}\right]+$$

$$\left.+\sum_{p,m=1}^{n}\hat{D}^{*}_{(pk)}\left[\left\{\int_0^t Q_{(pm)}(t,\tau)\,\vartheta_m(\tau)\,d\tau\right\}_{,}^{i}\right]\right\}_{,i}+\frac{1}{\rho}\sum_{j=1}^{r}\nu_{kj}J_j-\rho_{,i}\frac{1}{\rho}I^{i}_{(k)}. \qquad (28)$$

С помощью приведенных выше уравнений состояния кроме прямых краевых задач можно решать также задачи оптимального управления термодинамическим состоянием среды.

1. *Бурак Я. Й., Галапац Б. П., Гнідець Б. Н.* Фізико-механічні процеси в електропровідних тілах.— К. : Наук. думка, 1978.— 230 с.
2. *Де Гроот С., Мазур П.* Неравновесная термодинамика.— М. : Мир, 1964.— 456 с.
3. *Дьярмати И.* Неравновесная термодинамика.— М. : Мир, 1974.— 301 с.
4. *Зубарев Д. Н.* Неравновесная статистическая термодинамика.— М. : Наука, 1971.— 414 с.
5. *Ильюшин А. А.* Механика сплошной среды.— М. : Изд-во Моск. ун-та, 1978.— 286 с.
6. *Подстригач Я. С., Бурак Я. И., Асташкин В. И.* Основные уравнения процесса деформации многокомпонентных твердых тел при аллотропическом превращении.— Прикл. механика, 1977, 13, № 10, с. 108—113 с.
7. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды : В 2-х т.— М. : Наука, 1973.— Т. 1. 535 с.
8. *Хорошун Л. П.* Термодинамические основы реологии.— Прикл. механика, 1965, 1, № 1, с. 93—97 с.

Тернопольский филиал Львовского политехнического института

Получено 30.12.82

УДК 539.3 : 538.54

А. Р. Гачкевич, Р. С. Мусий

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ТЕМПЕРАТУРНЫХ И МЕХАНИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ В ЭЛЕКТРОПРОВОДНЫХ ПЛАСТИНАХ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ВНЕШНЕГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

В известных в литературе [1, 4, 7] исследованиях по аналитическому определению полей температуры и напряжений в электропроводных телах, находящихся под воздействием внешних нестационарных электромагнитных