В качестве примера рассмотрим случай, когда имеется дискообразная трещина единичного радиуса, нагруженная усилиями $P_3(x) = -P_0 = \text{const}$. Тогда точное решение уравнения (2) имеет вид $\alpha_3(x) = \frac{P_0}{\pi^2}\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$. Решая уравнение (8) численно, получаем

$$\alpha_3(x) = 0,10135P_0\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}.$$

При этом дискретизация области S проводилась таким образом: по радиусу выбиралось 11, а по углу φ — 8 точек деления. Время решения уравнения (8) на ЭВМ М-4030 составляло 6 мин.

Рассмотрим еще случай, когда $P_3(x) = -P_0x_1^2$ $(P_0 = \text{const})$. Точное решение уравнения (8) определяется по формуле

$$\alpha_3(x) = \frac{P_0}{\pi^2}\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}\,\frac{5 + 22x_1^2 - 2x_2^2}{45}.$$

Решение, полученное с использованием ЭВМ, представим в виде

$$\alpha_3(x) = P_0\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}\,\psi_3(x),$$

где $\psi_3(x)$ при $|x| = 1$ для различных углов φ определяется так:

φ	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π
$\psi_3(1)$	0,06153	0,03381	0,00608	0,03381	0,06153
Точное значение	0,06079	0,03378	0,00675	0,03378	0,06079

Дискретизация области S проводилась аналогично предыдущему примеру и поэтому расход машинного времени был тот же. Рассмотренные примеры показывают достаточную эффективность изложенного выше численно-аналитического метода решения задач математической теории трещин для бесконечного тела с плоскими трещинами.

Отметим, что по значениям функций $\psi_j(x)$ на контуре области S непосредственно определяются коэффициенты интенсивности напряжений [2]. Изложенный выше способ решения задач теории трещин является очень удобным, если необходимо вычислить лишь коэффициенты интенсивности напряжений.

1. *Кит Г. С., Хай М. В.* Интегральные уравнения пространственных задач термоупругости для тел с трещинами.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1975, № 12, с. 1108—1112.
2. *Хай М. В.* О решении задач термоупругости для тел с плоскими трещинами, контур которых описывается кривой второго порядка.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1980, вып. 11, с. 39—44.

Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР, Львов

Получено 25.03.82

УДК 539.377

Я. С. Подстригач, Ю. А. Чернуха

О ЗАКРИТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЯХ ТЕРМОНАПРЯЖЕННОГО СТЕРЖНЯ

При исследовании устойчивости термонапряженных элементов конструкций обычно ограничиваются определением температуры, соответствующей точке бифуркации равновесных состояний. Ниже на примере равномерно нагретого стержня с шарнирно закрепленными концами исследуются малые закритические деформации.

Общее решение уравнения

$$EIw^{(4)} + Hw^{(2)} = 0, \tag{1}$$

описывающего прогибы w стержня при его продольном изгибе, представим в виде

$$w = C_0 + C_1 x + C_2 k^{-2} (1 - \cos kx) + C_3 k^{-3} (kx - \sin kx). \tag{2}$$

Здесь $k^2 = (EI)^{-1} H$; E — модуль Юнга; I — момент инерции поперечного сечения стержня; H — сжимающая сила (распор). Из граничных условий

$$w(0) = w^{(2)}(0) = w(l) = w^{(2)}(l) = 0, \tag{3}$$

соответствующих шарнирному закреплению концов стержня, получаем

$$C_0 = C_2 = 0, \quad C_3 \sin kl = 0, \quad C_1 k^2 + C_3 = 0. \tag{4}$$

Соотношения (2), (4) дают: $w \equiv 0$ при $kl \neq n\pi$ и

$$w = C_1 (n\pi)^{-1} \sin \frac{n\pi x}{l} \quad \text{при } kl = n\pi. \tag{5}$$

Наименьшему собственному значению задачи ($n = 1$) соответствуют следующие значения распора, среднего (по поперечному сечению) напряжения σ и температуры t:

$$H_* = \pi^2 l^{-2} EI, \quad \sigma_* = \pi^2 \lambda^{-2} E, \quad \alpha t_* = \pi^2 \lambda^{-2}, \tag{6}$$

где λ — гибкость стержня; α — температурный коэффициент линейного расширения.

Если стержень нагружен на конце заданной продольной силой, то из линеаризированной задачи (1), (3) амплитуда закритических прогибов не может быть определена. В рассматриваемом случае температурного выпучивания стержня воспользуемся условием совместности деформаций

$$\varepsilon_* = \varepsilon_t - \varepsilon_{\text{из}}, \tag{7}$$

где $\varepsilon_t = \alpha t$ — тепловая деформация оси стержня; $\varepsilon_{\text{из}}$ — деформация оси, обусловленная изгибом стержня, причем [2]

$$\varepsilon_{\text{из}} = \frac{1}{2l} \int_0^l (w')^2 \, dx. \tag{8}$$

Из соотношений (7), (8) и (5) находим

$$C_1^2 = 4\alpha (t - t_*). \tag{9}$$

Таким образом, задача (1) — (8) приводит к решению (5), (9), согласно которому квадрат амплитуды закритических прогибов термонапряженного стержня пропорционален разности текущей и эйлеровой температур и не зависит от механических параметров стержня.

Отметим, что несколько иная интерпретация рассмотренного явления дана в монографии [1], где утверждается, что как только начнется выпучивание стержня, реакции опор, равные сжимающему усилию в стержне, будут уменьшаться. Однако, как следует из предыдущего, при $H < H_*$ задача (1), (3) имеет только тривиальное решение.

Отметим также, что полученное решение (5), (9) справедливо только для малых закритических прогибов, что связано с использованием линеаризированного уравнения (1).

1. *Вольмир А. С.* Устойчивость упругих систем.— М. : Физматгиз, 1963.— 879 с.
2. *Черпуха Ю. А.* Циліндричний згин слабовикривлених пластин.— К. : Вид-во АН УРСР, 1963.—116 с.

Институт прикладных проблем механики
и математики АН УССР, Львов

Получено 14.12.82