Тогда

$$\left\|\begin{array}{c} B_t(x) \\ \hdashline \bar{A}_t(x) \left\|\begin{array}{ccc} s_{1\,n-t+1} & \ldots & s_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ s_{n\,n-t+1} & \ldots & s_{nn} \end{array}\right\| \end{array}\right\| T(x) = \left\|\begin{array}{cccc} \frac{\varepsilon_t(x)}{\varepsilon_1(x)} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \frac{\varepsilon_t(x)}{\varepsilon_{t-1}(x)} & \\ 0 & & & 1 \\ \hdashline f_{11}(x) & \ldots & f_{1\,t-1}(x) & f_{1t}(x) \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ f_{t1}(x) & \ldots & f_{t\,t-1}(x) & f_{tt}(x) \end{array}\right\|,$$

где коэффициенты многочленов $f_{ij}(x)$ $(i,\ j = \overline{1,\ t})$ являются зависимыми от параметров из общего решения уравнения (4).

Разделим каждый многочлен $f_{ij}(x)$ $(i = \overline{1,\ t},\ j = \overline{1,\ t-1})$ на $\frac{\varepsilon_t(x)}{\varepsilon_j(x)}$. Тогда получим

$$f_{ij}(x) = \frac{\varepsilon_t(x)}{\varepsilon_j(x)} d_{ij}(x) + g_{ij}(x).$$

Здесь

$$g_{ij}(x) = p_{ij0}x^{k_{ij}} + p_{ij1}x^{k_{ij}-1} + \cdots + p_{ijk_{ij}}.$$

Запишем систему уравнений относительно параметров из общего решения уравнения (4):

$$\begin{aligned} p_{ij0} &= 0, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ p_{ijk_{ij}} &= 0. \end{aligned} \qquad (16)$$

Учитывая известные результаты (см. дополнение [1]), получаем необходимое и достаточное условие разрешимости уравнения (5).

**Теорема 3.** Уравнение (5) разрешимо над $\mathbf{C}[x]$ тогда и только тогда, когда система (16) имеет решение над $\mathbf{C}$.


1. *Казімірський П. С.* Розклад матричних многочленів на множники.— К. : Наук. думка, 1981.—224 с.
2. *Казімірський П. С., Зеліско В. Р., Петричкович В. М.* До питання про подібність матричних многочленів.— Доп. АН УРСР. Сер. А, 1976, № 10, с. 876—878.
3. *Казімірський П. С., Петричкович В. М.* Про еквівалентність поліноміальних матриць.— В кн.: Теоретичні та прикладні питання алгебри і диференціальних рівнянь. К. : Наук. думка, 1977, с. 61—66.



Институт прикладных проблем механики
и математики АН УССР, Львов



Получено 23.08.82



УДК 539.377



**М. В. Хай, И. В. Калыняк**


## ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ЧИСЛЕННОМУ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ТРЕЩИН

Известно, что задачи термоупругости для бесконечного тела с плоскими трещинами сводятся к решению систем сингулярных интегральных уравнений вида [1]

$$\Delta \iint\limits_S \frac{\alpha_i(\xi)}{|x-\xi|} d_\xi S + (-1)^i \nu (1-\delta_{i3}) \frac{\partial}{\partial x_{3-i}} \times$$

$$\times \iint\limits_S \left[\alpha_1(\xi) \frac{\partial}{\partial x_2} - \alpha_2(\xi) \frac{\partial}{\partial x_3}\right] \frac{d_\xi S}{|x-\xi|} = P_i(x), \quad x \in S, \quad i = 1,\ 2,\ 3, \qquad (1)$$

где $P_i(x)$ — известные функции; $S$ — плоская область, занятая трещиной; $\alpha_i(\xi)$ — неизвестные функции, обращающиеся в нуль на контуре области $S$; $x$ — точка с координатами $(x_1, x_2)$.

Простейшие примеры показывают, что решения уравнений (1) можно представить в виде

$$\alpha_i(x) = \sqrt{L(x)}\,\varphi_i(x).$$

Здесь $L(x)$ — функция, которой описывается контур области $S$; $\varphi_i(x)$ — неизвестные функции.

Если $P_i(x)$ — полиномиальные функции, а область $S$ эллиптическая, то $\varphi_i(x)$ также являются полиномиальными функциями. Для произвольных $P_i(x)$, интегрируемых в области $S$, задача об определении $\varphi_i(x)$ аналитически оказывается очень сложной, так как при этом приходится решать системы линейных алгебраических уравнений достаточно высокого порядка. Поэтому более приемлемым является численно-аналитический подход, основанный на численном определении функций $\varphi_i(x)$ в области $S$.

Для изложения схемы численного решения уравнений (1) ограничимся первоначально значением $i = 3$ и проведем в нем тождественные преобразования

$$\iint\limits_S \frac{\alpha_3(\xi)}{|x-\xi|^3}\,d_\xi S = \iint\limits_S \frac{\sqrt{L(\xi)}\,\varphi_3(\xi)}{|x-\xi|^3}\,d_\xi S - \iint\limits_{S_\varepsilon} \frac{\sqrt{L(\xi)}\,f_3(x,\xi)}{|x-\xi|^3}\,d_\xi S +$$

$$+ \iint\limits_{S_\varepsilon} \frac{\sqrt{L(\xi)}\,f_3(x,\xi)}{|x-\xi|^3}\,d_\xi S = P_3(x), \quad x \in S, \tag{2}$$

где $S$ — произвольная плоская область; $f_3(x, \xi)$ — неизвестная функция; $S_\varepsilon$ — круговая область радиуса $\varepsilon$ с центром в точке $x$.

Для определения $f_3(x, \xi)$ преобразуем уравнение (2):

$$\iint\limits_{S'_\varepsilon} \frac{\sqrt{L(\xi)}\,\varphi_3(\xi)}{|x-\xi|^3}\,d_\xi S + \iint\limits_{S_\varepsilon} \frac{\sqrt{L(\xi)}}{|x-\xi|^3}\,[\varphi_3(\xi) - f_3(x,\xi)]\,d_\xi S +$$

$$+ \iint\limits_{S_\varepsilon} \frac{\sqrt{L(\xi)}\,f_3(x,\xi)}{|x-\xi|^3}\,d_\xi S = \iint\limits_{S_\varepsilon} \frac{\sqrt{L(\xi)}}{|x-\xi|^3}\,[\varphi_3(\xi) - f_3(x,\xi)]\,d_\xi S +$$

$$+ \iint\limits_{S'_\varepsilon} \frac{\sqrt{L(\xi)}\,\varphi_3(\xi)}{|x-\xi|^3}\,d_\xi S - \iint\limits_{S'_\varepsilon} \frac{\sqrt{L(\xi)}\,f_3(x,\xi)}{|x-\xi|^3}\,d_\xi S +$$

$$+ \iint\limits_{S} \frac{\sqrt{L(\xi)}\,f_3(x,\xi)}{|x-\xi|^3}\,d_\xi S = P_3(x), \quad x \in S. \tag{3}$$

Здесь $S'_\varepsilon$ — такая область, что $S'_\varepsilon \cup S_\varepsilon = S$.

С учетом (3) исходное уравнение (2) представим в виде

$$\iint\limits_S \frac{\sqrt{L(\xi)}}{|x-\xi|^3}\,[\varphi_3(\xi) - f_3(x,\xi)]\,d_\xi S + \iint\limits_S \frac{\sqrt{L(\xi)}\,f_3(x,\xi)}{|x-\xi|^3}\,d_\xi S = P_3(x), \tag{4}$$

которое справедливо для всех значений $x \in S$.

Функцию $f_3(x, \xi)$ определим из условия

$$\varphi_3(\xi) - f_3(x,\xi) = |x-\xi|^3\,\psi(x,\xi), \quad \xi \in S_\varepsilon, \tag{5}$$

где $\psi(x, \xi)$ — произвольная ограниченная в $S_\varepsilon$ функция. При таком выборе $f_3(x, \xi)$

$$\left|\iint\limits_{S_\varepsilon} \frac{\sqrt{L(\xi)}}{|x-\xi|^3}\,[\varphi_3(\xi) - f_3(x,\xi)]\,d_\xi S\right| = \left|\iint\limits_{S_\varepsilon} \sqrt{L(\xi)}\,\psi(x,\xi)\,d_\xi S\right| \leqslant M\pi\varepsilon^2, \tag{6}$$

$$M = \max_{\xi \in S_\varepsilon} \sqrt{L(\xi)}\,\psi(x,\xi).$$

Из приведенных соотношений следует, что соответствующим выбором $\varepsilon$ величина двумерного интеграла в (6) может быть сделана как угодно малой.

Легко убедиться в том, что функция $f_3(x, \xi)$, определяемая через $\varphi_3(x)$ соотношением

$$f_3(x, \xi) = \varphi_3(x) + \frac{\partial\varphi_3(x)}{\partial x_1}(\xi_1 - x_1) + \frac{\partial\varphi_3(x)}{\partial x_2}(\xi_2 - x_2) + \\ + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2\varphi_3(x)}{\partial x_1^2}(\xi_1 - x_1)^2 + 2\frac{\partial^2\varphi_3(x)}{\partial x_1 \partial x_2}(\xi_1 - x_1)(\xi_2 - x_2) + \right. \\ \left. + \frac{\partial^2\varphi_3(x)}{\partial x_2^2}(\xi_2 - x_2)^2\right], \quad \xi \in S_\varepsilon, \tag{7}$$

удовлетворяет условию (5), так как $f_3(x, \xi)$ равна первым трем членам разложения в окрестности точки $x$ функции $\varphi_3(\xi)$ в ряд Тейлора по степеням $\rho = |x - \xi| \leqslant \varepsilon$.

С учетом формул (5) — (7) интегральное уравнение (4) может быть преобразовано к виду

$$\varphi_3(x) I_{00}(x) + \frac{\partial\varphi_3(x)}{\partial x_1} I_{10}(x) + \frac{\partial\varphi_3(x)}{\partial x_2} I_{01}(x) + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2\varphi_3(x)}{\partial x_1^2} I_{20}(x) + \right. \\ \left. + \frac{\partial^2\varphi_3(x)}{\partial x_2^2} I_{02}(x) + 2\frac{\partial^2\varphi_3(x)}{\partial x_1 \partial x_2} I_{11}(x)\right] + \iint\limits_{S'_\varepsilon} \frac{\sqrt{L(\xi)}}{|x - \xi|^3}\left[\varphi_3(\xi) - \varphi_3(x) - \right. \\ - \frac{\partial\varphi_3(x)}{\partial x_1}(\xi_1 - x_1) - \frac{\partial\varphi_3(x)}{\partial x_2}(\xi_2 - x_2) - \frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi_3(x)}{\partial x_1^2}(\xi_1 - x_1)^2 - \\ \left. - \frac{\partial^2\varphi_3(x)}{\partial x_1 \partial x_2}(\xi_1 - x_1)(\xi_2 - x_2) - \frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi_3(x)}{\partial x_2^2}(\xi_2 - x_2)^2\right] d_\xi S = P_3(x), \qquad x \in S, \tag{8}$$

где

$$I_{ij}(x) = \iint\limits_S \frac{\sqrt{L(\xi)}(\xi_1 - x_1)^i(\xi_2 - x_2)^j}{|x - \xi|^3} d_\xi S, \quad i, j = 0, 1, 2. \tag{9}$$

Вычисляя $I_{ij}(x)$ аналитически и задавая область $S_\varepsilon$, уравнение (8) можно решить численно путем сведения задачи об определении $\varphi_3(\xi)$ к решению системы линейных алгебраических уравнений, полагая при этом величину (6) равной нулю. Порядок системы зависит от разбиения области $S$ на части. В пределах каждой области разбиения функция $\varphi_3(\xi)$ считается постоянной.

Таким образом, основная математическая трудность в численном решении уравнения (8) сводится к аналитическому определению интегралов (9).

Для аналогичной регуляризации уравнений (1) при $i = 1, 2$, преобразуем их к виду

$$\iint\limits_S \alpha_1(\xi)\left[\frac{1+\nu}{|x - \xi|^3} - \frac{3\nu(x_2 - \xi_2)^2}{|x - \xi|^5}\right] d_\xi S + 3\nu\iint\limits_S \alpha_2(\xi)\frac{(x_1 - \xi_1)(x_2 - \xi_2)}{|x - \xi|^5} d_\xi S = \\ = P_1(x), \tag{10}$$

$$\iint\limits_S \alpha_2(\xi)\left[\frac{1+\nu}{|x - \xi|^3} - \frac{3\nu(x_1 - \xi_1)^2}{|x - \xi|^5}\right] d_\xi S + 3\nu\iint\limits_S \alpha_1(\xi)\iint\limits_S \frac{(x_1 - \xi_1)(x_2 - \xi_2)}{|x - \xi|^5} d_\xi S = \\ = P_2(x).$$

Представив $\alpha_i(\xi)$ в виде

$$\alpha_i(\xi) = \sqrt{L(\xi)}\,\varphi_i(\xi) \tag{11}$$

и проведя аналогичные выкладки, как в случае уравнения (1) при $i = 3$, можно свести задачу об определении $\varphi_i(\xi)$ к решению системы интегродифференциальных уравнений вида

$$
\begin{aligned}
&\varphi_1(x)\left[(1+\nu)I_{00}-3\nu J_{02}\right]+\frac{\partial\varphi_1(x)}{\partial x_1}\left[(1+\nu)I_{10}-3\nu J_{12}\right]+\\
&+\frac{\partial\varphi_1(x)}{\partial x_2}\left[(1+\nu)I_{01}-3\nu J_{03}\right]+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi_1(x)}{\partial x_1^2}\left[(1+\nu)I_{20}-3\nu J_{22}\right]+\\
&+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi_1(x)}{\partial x_2^2}\left[(1+\nu)I_{02}-3\nu J_{04}\right]+\frac{\partial^2\varphi_1(x)}{\partial x_1\partial x_2}\left[(1+\nu)I_{11}-3\nu J_{13}\right]+\\
&+3\nu\left\{\varphi_2(x)J_{11}+\frac{\partial\varphi_2(x)}{\partial x_1}J_{21}+\frac{\partial\varphi_2(x)}{\partial x_2}J_{12}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi_2(x)}{\partial x_1^2}J_{31}+\right.\\
&\left.+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi_2(x)}{\partial x_2^2}J_{13}+\frac{\partial^2\varphi_2(x)}{\partial x_1\partial x_2}J_{22}\right\}+\iint\limits_{S'_\varepsilon}\frac{\sqrt{L(\xi)}}{|x-\xi|^3}\left\{\left[1+\nu-\frac{3\nu(x_2-\xi_2)^2}{|x-\xi|^2}\right]\times\right.\\
&\times\left[\varphi_1(\xi)-\varphi_1(x)-\frac{\partial\varphi_1(x)}{\partial x_1}(\xi_1-x_1)-\frac{\partial\varphi_1(x)}{\partial x_2}(\xi_2-x_2)-\right.\\
&-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi_1(x)}{\partial x_1^2}(\xi_1-x_1)^2-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi_1(x)}{\partial x_2^2}(\xi_2-x_2)^2-\\
&\left.-\frac{\partial^2\varphi_1(x)}{\partial x_1\partial x_2}(\xi_1-x_1)(\xi_2-x_2)\right]+3\nu\frac{(x_1-\xi_1)(x_2-\xi_2)}{|x-\xi|^2}\left[\varphi_2(\xi)-\varphi_2(x)-\right.\\
&-\frac{\partial\varphi_2(x)}{\partial x_1}(\xi_1-x_1)-\frac{\partial\varphi_2(x)}{\partial x_2}(\xi_2-x_2)-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi_2(x)}{\partial x_1^2}(\xi_1-x_1)^2-\\
&\left.\left.-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi_2(x)}{\partial x_2^2}(\xi_2-x_2)^2-\frac{\partial^2\varphi_2(x)}{\partial x_1\partial x_2}(\xi_1-x_1)(\xi_2-x_2)\right]\right\}d_\xi S=P_1(x),\qquad x\in S,\\
&\varphi_2(x)\left[(1+\nu)I_{00}-3\nu J_{20}\right]+\frac{\partial\varphi_2(x)}{\partial x_1}\left[(1+\nu)I_{10}-3\nu J_{30}\right]+\\
&+\frac{\partial\varphi_2(x)}{\partial x_2}\left[(1+\nu)I_{01}-3\nu J_{21}\right]+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi_2(x)}{\partial x_1^2}\left[(1+\nu)I_{20}-3\nu J_{40}\right]+\\
&+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi_2(x)}{\partial x_2^2}\left[(1+\nu)I_{02}-3\nu J_{22}\right]+\frac{\partial^2\varphi_2(x)}{\partial x_1\partial x_2}\left[(1+\nu)I_{11}-3\nu J_{31}\right]+\\
&+3\nu\left\{\varphi_1(x)J_{11}+\frac{\partial\varphi_1(x)}{\partial x_1}J_{21}+\frac{\partial\varphi_1(x)}{\partial x_2}J_{12}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi_1(x)}{\partial x_1^2}J_{31}+\right.\\
&\left.+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi_1(x)}{\partial x_2^2}J_{13}+\frac{\partial^2\varphi_1(x)}{\partial x_1\partial x_2}J_{22}\right\}+\iint\limits_{S'_\varepsilon}\frac{\sqrt{L(\xi)}}{|x-\xi|^3}\left\{\left[1+\nu-3\nu\frac{(x_1-\xi_1)^2}{|x-\xi|^2}\right]\times\right.\\
&\times\left[\varphi_2(\xi)-\varphi_2(x)-\frac{\partial\varphi_2(x)}{\partial x_1}(\xi_1-x_1)-\frac{\partial\varphi_2(x)}{\partial x_2}(\xi_2-x_2)-\right.\\
&-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi_2(x)}{\partial x_1^2}(\xi_1-x_1)^2-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi_2(x)}{\partial x_2^2}(\xi_2-x_2)-\\
&\left.-\frac{\partial^2\varphi_2(x)}{\partial x_1\partial x_2}(\xi_1-x_1)(\xi_2-x_2)\right]+3\nu\frac{(x_1-\xi_1)(x_2-\xi_2)}{|x-\xi|^2}\left[\varphi_1(\xi)-\varphi_1(x)-\right.\\
&-\frac{\partial\varphi_1(x)}{\partial x_1}(\xi_1-x_1)-\frac{\partial\varphi_1(x)}{\partial x_2}(\xi_2-x_2)-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi_1(x)}{\partial x_1^2}(\xi_1-x_1)^2-\\
&\left.\left.-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi_1(x)}{\partial x_2^2}(\xi_2-x_2)^2-\frac{\partial^2\varphi_1(x)}{\partial x_1\partial x_2}(\xi_1-x_1)(\xi_2-x_2)\right]\right\}d_\xi S=P_2(x),\qquad x\in S.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Здесь $I_{ij}$ определяются по формулам (9);

$$
J_{ij}(x)=\iint\limits_{S}\frac{\sqrt{L(\xi)}\,(\xi_1-x_1)^i(\xi_2-x_2)^j}{|x-\xi|^5}d_\xi S,\quad i,\ j=\overline{0,4},\quad i+j\geqslant 2. \tag{13}
$$

В качестве примера рассмотрим случай, когда имеется дискообразная трещина единичного радиуса, нагруженная усилиями $P_3(x) = -P_0 = \text{const}$. Тогда точное решение уравнения (2) имеет вид $\alpha_3(x) = \frac{P_0}{\pi^2}\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$. Решая уравнение (8) численно, получаем

$$\alpha_3(x) = 0{,}10135 P_0 \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}.$$

При этом дискретизация области $S$ проводилась таким образом: по радиусу выбиралось 11, а по углу $\varphi$ — 8 точек деления. Время решения уравнения (8) на ЭВМ М-4030 составляло 6 мин.

Рассмотрим еще случай, когда $P_3(x) = -P_0 x_1^2\ (P_0 = \text{const})$. Точное решение уравнения (8) определяется по формуле

$$\alpha_3(x) = \frac{P_0}{\pi^2}\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}\,\frac{5 + 22x_1^2 - 2x_2^2}{45}.$$

Решение, полученное с использованием ЭВМ, представим в виде

$$\alpha_3(x) = P_0\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}\,\psi_3(x),$$

где $\psi_3(x)$ при $|x| = 1$ для различных углов $\varphi$ определяется так:

| $\varphi$ | 0 | $\pi/4$ | $\pi/2$ | $3\pi/4$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\psi_3(1)$ | 0,06153 | 0,03381 | 0,00608 | 0,03381 | 0,06153 |
| Точное значение | 0,06079 | 0,03378 | 0,00675 | 0,03378 | 0,06079 |

Дискретизация области $S$ проводилась аналогично предыдущему примеру и поэтому расход машинного времени был тот же. Рассмотренные примеры показывают достаточную эффективность изложенного выше численно-аналитического метода решения задач математической теории трещин для бесконечного тела с плоскими трещинами.

Отметим, что по значениям функций $\psi_j(x)$ на контуре области $S$ непосредственно определяются коэффициенты интенсивности напряжений [2]. Изложенный выше способ решения задач теории трещин является очень удобным, если необходимо вычислить лишь коэффициенты интенсивности напряжений.


1. *Кит Г. С., Хай М. В.* Интегральные уравнения пространственных задач термоупругости для тел с трещинами.— Докл АН УССР. Сер. А, 1975, № 12, с. 1108—1112.
2. *Хай М. В.* О решении задач термоупругости для тел с плоскими трещинами, контур которых описывается кривой второго порядка.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1980, вып. 11, с. 39—44.



Институт прикладных проблем механики
и математики АН УССР, Львов



Получено 25.03.82



УДК 539.377



Я. С. Подстригач, Ю. А. Чернуха


## О ЗАКРИТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЯХ ТЕРМОНАПРЯЖЕННОГО СТЕРЖНЯ

При исследовании устойчивости термонапряженных элементов конструкций обычно ограничиваются определением температуры, соответствующей точке бифуркации равновесных состояний. Ниже на примере равномерно нагретого стержня с шарнирно закрепленными концами исследуются малые закритические деформации.

Общее решение уравнения

$$EIw^{(4)} + Hw^{(2)} = 0, \tag{1}$$