где $x \in [x_0, \ x_0 + L]$, $(L > 0)$, а $G[x, u, v]$, $g[x, y, u, v]$ — достаточно гладкие функции.

1. *Бельтюков Б. А.* Аналог метода Рунге — Кутта для решения нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра.— Дифференц. уравнения, 1965, 1, № 4, с. 545—556.
2. *Ищук В. А.* Двусторонние методы вида Рунге — Кутта для нелинейного интегрального уравнения Вольтерра.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1975, № 1, с. 14—17.
3. *Ломакович А. М.* Решение интегральных уравнений Вольтерра методом Рунге — Кутта — Фельберга.— Там же, 1969, № 4, с. 307—309.
4. *Oules H. M.* Sur l'integration numerique de l'equation integrale de Volterra de seconde espece.— C. r. Acad. Sci., 1960, 250, N 8, p. 1433—1435.
5. *Pouzet P. M.* Methode d'integration numerique de l'equation integrale de Volterra de seconde espece.— Ibid., 1960, 250, N 19, p. 3101—3102.

Институт прикладных проблем механики математики АН УССР, Львов

Получено 18.10.82

УДК 517.972.7

Р. Я. Мацюк

О СУЩЕСТВОВАНИИ ЛАГРАНЖИАНА ДЛЯ НЕАВТОНОМНОЙ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Настоящая заметка обобщает результаты работы [1] на случай зависящего от времени лагранжиана. Системе дифференциальных уравнений r-го порядка $\lambda_i(t, x^j, x^j_{(1)}, \ldots, x^j_{(r)}) = 0$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ ставится в соответствие пфаффовая форма $\lambda = \lambda_1 dx^1 + \cdots + \lambda_n dx^n$. Вводятся в рассмотрение следующие операторы, действующие на зависящие от времени дифференциальные формы от переменных $x^i \equiv x^i_{(0)}, x^i_{(1)}, \ldots, x^i_{(r)}$ [6]:

1) внешний послойный (относительно проекции $\pi: (t, x^i_{(0)}, \ldots, x^i_{(r)}) \to t$) дифференциал d_π, дифференцирующий только по координатам слоя:

$$d_\pi f = \sum\nolimits'_{s=0} \frac{\partial f}{\partial x^i_{(s)}} dx^i_{(s)};$$

2) дифференцирование D, определяемое соотношениями

$$D d_\pi = d_\pi D, \quad Df = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum\nolimits'_{s=0} x^i_{(s+1)} \frac{\partial f}{\partial x^i_{(s)}};$$

3) дифференцирования φ и φ_0, определяемые соотношениями

$$\varphi f = 0, \ \varphi dx^i = 0, \ \varphi dx^i_{(s)} = s dx^i_{(s-1)} \ (s > 0), \ \varphi_0 \omega = (\deg \omega)\, \omega;$$

4) дифференциал Лагранжа, определяемый формулой

$$\delta = \left(\varphi_0 + \sum\nolimits^r_{s=1} \frac{(-1)^s}{s!} D^s \varphi^s\right) d_\pi.$$

Согласно работе [6], критерий существования лагранжиана для системы уравнений $\lambda_i = 0$ выражается тождеством $\delta(\lambda_i dx^i) = 0$.

Теорема. Система дифференциальных уравнений $\lambda_i(t, x^j_{(0)}, \ldots, x^j_{(r)}) = 0$ тогда и только тогда является системой уравнений Эйлера — Пуассона, если выполняются тождества

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial x^j} - \frac{\partial \lambda_j}{\partial x^i} - \sum\nolimits^r_{s=0} (-1)^s \frac{d^s}{dt^s} \left(\frac{\partial \lambda_j}{\partial x^i_{(s)}} - \frac{\partial \lambda_i}{\partial x^j_{(s)}}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial x^j_{(v)}} - \sum\nolimits^r_{s=v} (-1)^s \frac{s!}{(s-v)!\, v!} \frac{d^{s-v}}{dt^{s-v}} \frac{\partial \lambda_j}{\partial x^i_{(s)}} = 0 \quad (1 \leqslant v \leqslant r). \qquad (*)$$

Доказательство аналогично приведенному в работе [1]. Условия $(*)$ должны рассматриваться как уравнения в частных производных на функции λ_i переменных t, x^j, $x^j_{(1)}$, ..., $x^j_{(r)}$. Необходимость условий $(*)$ в обобщении на уравнения Эйлера в частных производных указана в работе [2], их достаточность в третьем порядке установлена в работе [5]. Для автономных систем уравнений в частных производных координатное представление формы λ можно найти в работе [7].

П р и м е р 1. Рассмотрим систему уравнений четвертого порядка. Там, где это удобно, будем пользоваться матрично-векторными обозначениями. Внутреннее умножение, выполненное в последнюю очередь, обозначим точкой, а выполненное в первую очередь — просто слитным написанием. Для переменных $\mathbf{x}_{(1)}$, $\mathbf{x}_{(2)}$, $\mathbf{x}_{(3)}$, $\mathbf{x}_{(4)}$, $\mathbf{x}_{(5)}$, $\mathbf{x}_{(6)}$ примем обозначения $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$, $\mathbf{s}$, $\dot{\mathbf{s}}$, $\ddot{\mathbf{s}}$ соответственно и введем усеченные операторы полного дифференцирования

$$D_{x_{(u)}} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{v=0}^{u} \mathbf{x}_{(v+1)} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_{(v)}} .$$

Предложение. Система дифференциальных уравнений четвертого порядка $\lambda(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}, \mathbf{s}) = 0$ является системой уравнений Эйлера — Пуассона в том и только в том случае, если найдутся зависящие от переменных t, $\mathbf{x}$, $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ симметрическая вместе со своей $\mathbf{q}$-производной матрица $\mathbf{M}$, кососимметрическая матрица $\mathbf{A}$ и столбец $\mathbf{b}$, удовлетворяющие условиям

$$(j)\ \partial_{q^i} A_{jk} + 2\partial_{p^{[j}} M_{k]i} = 0,$$

$$(i)\ \mathrm{alt}\, \partial_p \otimes \mathbf{A} = \mathbf{0},$$

$$(ii)\ 2\partial_q \wedge \mathbf{b} + 3D_p\mathbf{A} = \mathbf{0},$$

$$(jjj)\ \partial^2_{q^i q^j} b_k + 2\partial_{p^{(i}} A_{j)k} - 3\partial_{x^{(i}} M_{jk)} + D_p \partial_{p^k} M_{ij} - 4\partial_{p^{(i}} M_{j)k} - D_p^2 \partial_{q^j} M_{ik} = 0,$$

$$(iv)\ 2\partial_{q^k}\partial_{p^{[i}} b_{j]} - 4\partial_{x^{[i}} A_{j]k} + \partial_{x^k} A_{ij} + 2D_p \partial_{p^k} A_{ij} - 4D_p \partial_{x^{[i}} M_{j]k} -$$

$$- 2D_p^2 \partial_{p^{[i}} M_{j]k} = 0,$$

$$(v)\ \partial_p \odot \mathbf{b} - D_p \partial_q \odot \mathbf{b} + D_p^3 \mathbf{M} = \mathbf{0},$$

$$(vi)\ 4\partial_x \wedge \mathbf{b} - 2D_p \partial_p \wedge \mathbf{b} - D_p^3 \mathbf{A} = \mathbf{0}$$

и такие, что

$$\lambda = \mathbf{M}\mathbf{s} + \mathbf{r}\partial_q \cdot \mathbf{M}\mathbf{r} + \mathbf{A}\mathbf{r} + 2D_p\mathbf{M}\mathbf{r} + \mathbf{b}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Условия теоремы запишутся следующим образом:

$$\partial_s \wedge \lambda = \mathbf{0}, \tag{1}$$

$$\partial_r \odot \lambda - 2D\partial_s \otimes \lambda = \mathbf{0}, \tag{2}$$

$$2\partial_q \wedge \lambda - 3D\partial_r \otimes \lambda + 6D^2\partial_s \otimes \lambda = \mathbf{0}, \tag{3}$$

$$2\partial_p \odot \lambda - 2\partial_q \otimes \lambda + 3D^2\partial_r \otimes \lambda - 4D^3\partial_s \otimes \lambda = \mathbf{0}, \tag{4}$$

$$2\partial_x \wedge \lambda - D\partial_p \wedge \lambda + D^2\partial_q \wedge \lambda - D^3\partial_r \wedge \lambda + D^4\partial_s \wedge \lambda = 0. \tag{5}$$

В уравнении (2) коэффициентами при переменной $\dot{\mathbf{s}}$ служат вторые производные от λ, так что они должны обращаться в нуль. Вместе с условием (1) это указывает на линейную зависимость $\lambda = \mathbf{M}\mathbf{s} + \mathbf{m}$ с симметрической матрицей $\mathbf{M}$, что позволит дальше расщепить уравнения (2) — (5) по степеням переменной $\mathbf{s}$. В соотношениях (3), (4) части, содержащие переменные $\dot{\mathbf{s}}$ в (3) и $\ddot{\mathbf{s}}$ в (4), имеют соответственно вид

$$3\partial_r \otimes \mathbf{M}\dot{\mathbf{s}} - 6\dot{\mathbf{s}}\partial_r \cdot \mathbf{M} = 0,\ 3\partial_r \otimes \mathbf{M}\ddot{\mathbf{s}} - 4\ddot{\mathbf{s}}\partial_r \cdot \mathbf{M} = 0,$$

откуда следует независимость матрицы $\mathbf{M}$ от переменной $\mathbf{r}$, вследствие чего условия (2), (3) и (4) упрощаются:

$$\partial_r \odot \mathbf{m} - 2D_q\mathbf{M} = \mathbf{0}, \tag{6}$$

$$2\partial_q \wedge \mathbf{m} - 3D_q\partial_r \otimes \mathbf{m} + 6\mathbf{q}\partial_x \cdot \mathbf{M} + 6D_xD_q\mathbf{M} + 6\mathbf{r}\partial_p \cdot \mathbf{M} + 6D_q\mathbf{r}\partial_p \cdot \mathbf{M} +$$

$$+ 6\mathbf{q}\partial_p \cdot D_q\mathbf{M} - 6\mathbf{q}\partial_x \cdot \mathbf{M} + 2\partial_q \wedge \mathbf{M}\mathbf{s} - 3\mathbf{s}\partial_r \cdot \partial_r \otimes \mathbf{m} + 6\mathbf{s}\partial_q \cdot \mathbf{M} + \\ + 6\mathbf{s}\partial_r \cdot \partial_t\mathbf{M} = 0, \tag{7}$$

$$4\mathbf{s}\partial_q \cdot \mathbf{M} + 3\mathbf{s}\partial_q \cdot \partial_q \otimes \mathbf{m} - 2\partial_q \otimes \mathbf{M}\mathbf{s} + 3(\mathbf{s}\partial_r)^2\partial_r \otimes \mathbf{m} - \\ - 12D_q\mathbf{s}\partial_q \cdot \mathbf{M} + 3D_q\mathbf{s}\partial_r \cdot \partial_r \otimes \mathbf{m} + 3\mathbf{s}\partial_q \cdot \partial_r \otimes \mathbf{m} + 3D_q\mathbf{s}\partial_r \cdot \partial_r \otimes \mathbf{m} - \\ - 2D_q\partial_q \otimes \mathbf{M}\mathbf{s} - 2\mathbf{s}\partial_r \cdot \partial_q \otimes \mathbf{m} - 4\mathbf{s}\partial_p \cdot \mathbf{M} + 2\partial_p \otimes \mathbf{M}\mathbf{s} - 4D_q^3\mathbf{M} + \\ + 3D_q^2\partial_p \otimes \mathbf{m} - 2D_q\partial_q \otimes \mathbf{m} + 2\partial_p \odot \mathbf{m} = 0. \tag{8}$$

Квадратичные по $\mathbf{s}$ слагаемые в формуле (8) указывают на полиномиальную третьей степени зависимость $\mathbf{m}$ от $\mathbf{r}$:

$$m_i = Q_{ikl}r^kr^l + N_{ik}r^k + b_i.$$

Положим $\mathbf{N} = \mathbf{A} + 2\mathbf{P}$, где матрица $\mathbf{P}$ симметрическая, матрица $\mathbf{A}$ антисимметрическая. Не содержащая $\mathbf{r}$ часть соотношения (6) определяет матрицу $\mathbf{P} = D_p\mathbf{M}$. Часть соотношения (8), содержащая $\mathbf{s}$, определяет квадратичное слагаемое в $\mathbf{m}$: $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{r} \otimes \mathbf{r} = \mathbf{r}\partial_p \cdot \mathbf{M}\mathbf{r}$ и указывает на симметричность производной матрицы $\partial_q \times \mathbf{M}$ также и по первой паре индексов. Рассматривая вместе часть (7), линейную по $\mathbf{r}$, и часть (8), линейную по $\mathbf{s}$, убеждаемся, что они эквивалентны условию (j). После упрощений оказывается, что уравнение (6) уже выполнено, уравнение (7) совпадает с условием (ii), уравнение (8) в части, не содержащей $\mathbf{s}$ и линейной по $\mathbf{r}$, совпадает с условием (jjj). Симметрическая составляющая части уравнения (8), не содержащей переменных $\mathbf{r}$ и $\mathbf{s}$, совпадает с условием (v), антисимметрическая обращается в нуль условием (ii).

Тождество (5) в части, линейной по $\mathbf{s}$ и не содержащей $\mathbf{r}$, совпадает с условием (i). Условия (vi) и (iv) содержатся соответственно в части, не зависящей от переменных $\mathbf{s}$ и $\mathbf{r}$, и в части, содержащей $\mathbf{s}$, но линейной по $\mathbf{r}$. Все остальное в тождестве (5) обращается в нуль, и доказательство закончено. Отметим следующее дифференциальное соотношение между условиями (ii), (iv) и (v):

$$\partial_{q^k}(v)_{ij} - (iv)_{kij} + 2(iv)_{ikj} - \partial_{p^k}(ii)_{ij} + 2\partial_{p^j}(ii)_{ik} \equiv 0. \tag{9}$$

Используя условия (ii) и (j), продифференцированные по $\mathbf{q}$, можно доказать симметричность условия (jjj) по последней паре индексов.

На самом деле матрицы $\mathbf{M}$, $\mathbf{A}$ и столбец $\mathbf{b}$ следующим образом выражаются через производные от функции Лагранжа:

$$M_{ik} = L_{q^iq^k},\ A_{ik} = L_{q^ip^k} - L_{q^kp^i},$$

$$b_i = q^kq^lL_{q^ip^kp^l} - q^kL_{p^ip^k} + 2q^kp^lL_{q^ip^kx^l} + q^kL_{q^ix^k} + 2q^kL_{q^ip^k} + \\ + p^kp^lL_{q^ix^kx^l} - p^kL_{p^ix^k} + 2p^kL_{q^ix^k} + L_{q^itt} - L_{p^it} + L_{x^i}.$$

Пример 2. Рассмотрим систему уравнений третьего порядка. Положим $\mathbf{M} = 0$. Согласно условию (j) матрица $\mathbf{A}$ зависит лишь от переменных t, $\mathbf{x}$ и $\mathbf{p}$. Условие (jjj) определяет зависимость столбца $\mathbf{b}$ от переменной $\mathbf{q}$:

$$\mathbf{b} = \mathbf{q}\partial_p \cdot \mathbf{A}\mathbf{q} + \mathbf{B}\mathbf{q} + \mathbf{c}.$$

Остальные условия упрощаются:

$$(ii)\ 2\,\mathrm{alt}\,\mathbf{B} - 3D_x\mathbf{A} = 0;$$

$$(iv)\ 2\partial_{p[i}B_{j]k} - 4\partial_{x[i}A_{j]k} + \partial_{x^k}A_{ij} + 2D_x\partial_{p^k}A_{ij} = 0;$$

условия (v) и (vi) распадаются каждое на два:

$$(v)\ \partial_p \odot \mathbf{c} - D_x\,\mathrm{sym}\,\mathbf{B} = \mathbf{0},$$

$$(iii)\ \partial_{p^k}B_{(ij)} - \partial_{p(i}B_{j)k} + D_x\partial_{p(i}A_{j)k} = 0;$$

$$(vi)\ 2\partial_{p^k}\partial_{p[i}c_{j]} - 4\partial_{x[i}B_{j]k} + D_x^2\partial_{p^k}A_{ij} + 6D_x\partial_{x[i}A_{jk]} = 0,$$

$$(vii)\ 4\partial_x \wedge \mathbf{c} - 2D_x\partial_p \wedge \mathbf{c} - D_x^3\mathbf{A} = 0.$$

Оказывается, однако, что условие (*iii*) следует из условий (*ii*) и (*iv*) по формуле (9) с учетом свойства (*i*) матрицы $\mathbf{A}$ (то же и в работе [1]).

Таким образом, система уравнений Эйлера — Пуассона третьего порядка имеет вид

$$\mathbf{Ar} + \mathbf{q}\partial_p \cdot \mathbf{Aq} + \mathbf{Bq} + \mathbf{c} = \mathbf{0},$$

где матрицы $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и столбец $\mathbf{c}$ удовлетворяют условиям (*i*), (*ii*), (*iv*) — (*vii*) и матрица $\mathbf{A}$ кососимметрическая. На самом деле,

$$B_{ik} = q^l L_{p^i p^k q^l} - L_{p^i p^k} + 2p^l L_{q^i p^k x^l} - p^l L_{q^k p^l x^l} + L_{q^i x^k} - L_{q^k x^i} + \\ + 2L_{q^i p^k t} - L_{q^k p^i t};$$

$$c_i = q^k p^l L_{p^i q^k x^l} - q^k L_{x^i q^k} + q^k L_{p^i q^k t} + p^k p^l L_{q^i x^k x^l} - p^k L_{p^i x^k} + \\ + 2p^k L_{q^i x^k} + L_{q^i tt} - L_{p^i t} + L_{x^i}.$$

П р и м е р 3. Рассмотрим систему уравнений второго порядка. Положим $\mathbf{A} = 0$. Условия (*ii*), (*iv*) — (*vii*) превращаются в эквивалентную форму условий Гельмгольца [3].

П р и м е р 4. Рассмотрим систему уравнений первого порядка. Положим $\mathbf{B} = 0$. Условия (*v*) и (*vi*) указывают на линейную зависимость $\lambda = \mathbf{Wp} + \mathbf{w}$ с антисимметрической матрицей $\mathbf{W}$, зависящей только от переменных t и $\mathbf{x}$. Тождество (*vii*) превращается в условия самосопряженности λ [4]:

$$\partial_{x[i} W_{jk]} + \partial_{x^k} W_{ij} = 0, \ \partial_x \wedge \mathbf{w} + \partial_t \mathbf{W} = \mathbf{0}.$$

1. *Мацюк Р. Я.* О существовании лагранжиана для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1981, вып. 13, с. 34—38.
2. *Anderson I. M.* Tensorial Euler — Lagrange expressions and conservation laws.— Aeq. Math., 1978, 17, N 2/3, p. 255—291.
3. *Engels E.* On the Helmholtz conditions for the existence of a Lagrange formalism.— Nuova Cim. B, 1975, 26, N 2, p. 481—492.
4. *Hojman S.* Construction of genotopic transformations for first order systems of differential equations.— Hadronic J., 1981, 5, N 1, p. 174—184.
5. *Horndeski G. V.* Differential operators associated with the Euler — Lagrange operator.— Tensor, 1974, 28, p. 303—318.
6. *Kolář I.* On the Euler — Lagrange differential in fibered manifolds.— Repts Math. Phys., 1977, 12, N 3, p. 301—305.
7. *Lawruk B., Tulczyjew W. M.* Criteria for partial differential equations to be Euler — Lagrange equations.— J. Different Equat., 1977, 24, N 2, p. 211—225.

Институт прикладных проблем механики
и математики АН УССР, Львов

Получено 28.07.82

УДК 517.52

Х. И. Кучминская

О ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ АБСОЛЮТНОЙ СХОДИМОСТИ ДВУМЕРНЫХ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ

Разложение функции в соответствующую цепную дробь является одним из наиболее употребляемых способов построения ее дробно-рациональных приближений. В работах [2, 3] введено понятие соответствующей цепной дроби для двукратного степенного ряда, вопрос поточечной сходимости которой приводит к рассмотрению числовой дроби вида

$$\cfrac{a_{00}}{\Phi_0 + \cfrac{a_{11}}{\Phi_1 + \cdot}} = \frac{a_{00}|}{|\Phi_0} + \frac{a_{11}|}{|\Phi_1} + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_{ii}|}{|\Phi_i}, \qquad (1)$$