тогда

$$\xi_n(x) = \frac{x^\alpha}{\sqrt{r_n}} P_n^{*(\alpha,k)}(x), \ \eta_n(x) = \frac{(1-x)^k}{\sqrt{r_n}} P_n^{*(\alpha,k)}(x),$$

или

$$\xi_n(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j^n x^{j+\alpha}, \ \eta_n(x) = \sum_{j=0}^{n} d_j^n \sum_{i=0}^{n} (-1)^k \binom{k}{i} x^{j+i}.$$

Коэффициенты разложения a_n и b_n в этом случае имеют вид

$$a_n = \sigma \sum_{j=0}^{n} d_j^n \sum_{i=0}^{k} (-1)^k \binom{k}{i} F[\sigma(1+i+j)], \ b_n = \sigma \sum_{j=0}^{n} c_j^n F[\sigma(1+j+\alpha)],$$

где $d_j^n = c_j^n = \frac{1}{\sqrt{r_n}} \alpha_j^n$; $\binom{k}{i}$ — биномиальные коэффициенты. Если положить, что

$$\omega_1(x) = \frac{1}{\sqrt{r_n}}, \ \omega_2(x) = \frac{x^\alpha (1-x)^k}{\sqrt{r_n}},$$

получим новые биортонормированные системы. В этом случае

$$\xi_n(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j^n x^j, \ \eta_n(x) = \sum_{j=0}^{n} d_j^n \sum_{i=0}^{k} (-1)^k \binom{k}{i} x^{j+i+\alpha},$$

$$a_n = \sigma \sum_{i=0}^{n} d_j^n \sum_{i=0}^{k} (-1)^k \binom{k}{i} F[\sigma(1+j+i+\alpha)], \ b_n = \sigma \sum_{j=0}^{n} c_j^n F[\sigma(1+j)].$$

Искомая функция $f(t)$ определяется формулой (9).

При $\alpha = 0$, $k = 0$ получаем известные в литературе результаты: обращение преобразования Лапласа с помощью смещенных многочленов Лежандра [2].

Сходимость частных сумм $\varphi_N(x)$ к $\varphi(x)$ обеспечивается [1] ограниченностью $\left|\sum_{n=0}^{N} a_n b_n\right|$ равномерно относительно N. Для рассматриваемого класса функций это легко доказывается путем построения мажорантного ряда, обладающего указанными свойствами.

1. *Качмаж С., Штейнгауз Г.* Теория ортогональных рядов.— М. : Физматгиз, 1958.— 368 с.
2. *Крылов В. И., Скобля Н. С.* Методы приближенного преобразования Фурье и обращение преобразования Лапласа.— М. : Наука, 1974.— 223 с.
3. *Побережный О. В.* О приближенном обращении преобразования Лапласа при помощи биортогональных разложений.— В кн.: Тез. докл. Второго респ. симпоз. по дифференц. и интегр. уравнениям. Одесса, 1978, с. 128—129.
4. *Сеге Г.* Ортогональные многочлены.— М. : Физматгиз, 1962.— 500 с.

Институт прикладных проблем механики
и математики АН УССР, Львов

Получено 17.03.82

УДК 517.63

Я. Д. Пяныло

ОБ ИССЛЕДОВАНИИ ПРИБЛИЖЕННОГО ОБРАЩЕНИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА С ПОМОЩЬЮ МНОГОЧЛЕНОВ ЯКОБИ

Метод приближенного обращения преобразования Лапласа с помощью многочленов Якоби заключается в следующем. Пусть известно изображение Лапласа $F(p)$ функции $f(t)$:

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt. \tag{1}$$

Если $P_n^{*(\alpha,\beta)}(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_i^n x^i$ — смещенные многочлены Якоби, то искомую функцию оригинала $f(t)$ представляем в виде ряда [1]

$$f(t) = h(t) \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{1}{\sqrt{r_n}} P_n^{*(\alpha,\beta)}(e^{-\sigma t}), \tag{2}$$

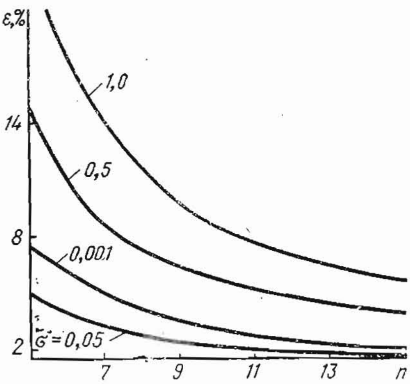
где $\sigma > 0$ — свободный параметр:

$$h(t) = \exp\left[-\sigma t\left(1 + \beta - \frac{\gamma_0}{\sigma}\right)\right][1 - \exp(-\sigma t)]^{\alpha};$$

$$r_n = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\,\Gamma(n+\beta+1)}{2m\Gamma(2m-n)\,n!};\quad 2m = 2n + \alpha + \beta + 1; \tag{3}$$

$$a_n = \frac{\sigma}{\sqrt{r_n}} \sum_{i=0}^{n} \alpha_i^n F(\gamma_0 + j\sigma).$$

Так как $F(p)$ — известная функция, то по формуле (3) вычисляются коэффициенты a_n, а по формуле (2) — искомый оригинал $f(t)$. Здесь предполагается, что $F(p)$ — аналитическая функция в полуплоскости $\mathrm{Re}\, p \geqslant \gamma_0$. Условия разложения оригинала $f(t)$ в ряд (2) приведены в работах [1, 2].



Ввиду простоты, возможности реализации на ЭВМ и математической обоснованности этот метод обладает многими свойствами, необходимыми для применения его к решению задач механики. Однако примеров применения его на практике немного. Главная причина этого в том, что по формуле (3) ввиду потери точности вычисления можно найти ограниченное число коэффициентов a_n, которых не всегда достаточно для вычисления оригинала $f(t)$ с требуемой точностью [3]. Устранению этого недостатка посвящены работы [1, 3]. В частности, в этих работах для определенных классов оригиналов найдены асимптотические формулы для вычисления a_n при больших n.

Целью настоящей работы является продолжение исследования метода приближенного обращения преобразования Лапласа с помощью ортогональных многочленов Якоби.

1. Сравнение коэффициентов, вычисленных по асимптотическим формулам, с их точными значениями. Как отмечалось выше, в работе [1] для определенного класса оригиналов найдены асимптотические формулы для вычисления a_n при $n \to \infty$. Как следует из примеров, найденная асимптотическая формула существенно зависит от свободного параметра σ. На рисунке для функции-изображения $F(p) = \frac{1}{p}(1 - \ln \gamma p)$, где γ — постоянная Эйлера, приведены зависимости погрешности вычисления ε (в %) коэффициентов a_n от n по асимптотической формуле при различных значениях σ. Как видно из рисунка, существует такое значение $\sigma = \sigma_{\text{оп}}$, при котором погрешность ε минимальная для каждого фиксированного n.

Если ε больше допустимой величины, то предлагается следующий метод стыковки коэффициентов, вычисленных по асимптотической формуле, с их точными значениями. В пределах возможности ЭВМ вычисляем коэффициенты по точной (a_n^T) и асимптотической (a_n^a) формулам при различных значениях σ. Из заданного интервала σ выбираем то, при котором ε минимальное. Вводим функцию $\varepsilon_1(n)$ так, чтобы

$$a_n^T = [1 + \varepsilon_1(n)]\, a_n^a, \tag{4}$$

причем $\varepsilon_1(n)$ обладала свойствами

$$\text{а) } \lim_{n\to 0} \varepsilon_1(n) = 0, \text{ б) } \left| \frac{a_n^a}{a_n^T} [1 + \varepsilon_1(n)] - 1 \right| \leqslant \varepsilon_д,$$

где $\varepsilon_д$ — допустимая точность вычисления коэффициентов a_n.

Таким образом, с помощью введенной функции $\varepsilon_1(n)$ коэффициенты a_n для больших n можно вычислить с наперед заданной точностью $\varepsilon_д$.

На практике функцию $\varepsilon_1(n)$ можно выбирать следующим образом. Асимптотическая формула для a_n есть не что иное, как первые члены асимптотического разложения коэффициентов a_n при $n \to \infty$. Тем самым известна шкала функций, по которой разлагаются a_n при $n \to \infty$. Представляя $\varepsilon_1(n)$ по известной шкале функций с неопределенными коэффициентами (например, $\varepsilon_1(n) = An^B \ln^C n$) и используя формулу (4), можно найти эти коэффициенты (A, B, C). Для этого в выражении (4) необходимо положить такое количество значений n ($n_1, n_2, \ldots, n_m$), сколько неизвестных коэффициентов входит в $\varepsilon_1(n)$ (в примере $m = 3$). Таким образом, получим систему m уравнений с m неизвестными, из которой находятся неопределенные коэффициенты.

2. **Вычисление оригинала в случае $\sigma t \to \infty$.** Если оригинал $f(t)$ ищется в виде ряда (2), то коэффициенты a_n вычисляются как по формуле (3), так и по асимптотической формуле, которая, как отмечалось в п. 1, дает хорошие результаты при некотором $\sigma = \sigma_{оп}$. Поскольку $\sigma_{оп} = \text{const}$, то $\sigma_{оп} t \to \infty$ при $t \to \infty$. В этом случае, поскольку $2e^{-\sigma t} - 1 \approx -1$, сумма $\sum_{n=0}^{N_0} a_n \frac{1}{\sqrt{r_n}} P_n^{*(\alpha,\beta)}(e^{-\sigma t})$, где N_0 — некоторое число, практически не зависит от t, и для достижения требуемой точности вычисления оригинала необходимо брать большое количество членов ряда (2) и с увеличением t это число растет. Если N_0 достаточно большое число, то, во-первых, требуется много машинного времени для счета и, во-вторых, вычисление большого количества членов ряда (2) вследствие накопления ошибок вычисления может привести к значительной утере точности вычисления оригинала. Решить эту проблему можно следующим образом.

Пусть N_1 — номер, до которого можно вычислять коэффициенты a_n по формуле (3), а для $n \geqslant N_1$ справедлива формула (4) для вычисления a_n. Асимптотическая формула для вычисления a_n^a приведена в работе [1].

Ряд (2) запишем в виде

$$f(t) = h(t) \left[\sum_{n=0}^{N_1-1} \frac{a_n}{\sqrt{r_n}} P_n^{*(\alpha,\beta)}(e^{-\sigma t}) + S(N_1, t) \right], \tag{5}$$

где

$$S(N_1, t) = \sum_{n=N_1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{r_n}} P_n^{*(\alpha,\beta)}(e^{-\sigma t}). \tag{6}$$

Теорема 1. Если $f(t)$, $t \in [0, \infty)$ — непрерывно дифференцируемая функция, обладающая свойствами

$$f(t) \approx \begin{cases} A + Bt^{\gamma} \exp(-ut^{\nu}) \ln^q t, & t \to 0, \\ C + Dt^{\delta} \exp(-vt) \ln^s t, & t \to \infty, \end{cases} \tag{7}$$

где A, C, γ, ν, q, δ, s — произвольные постоянные; $u, v \geqslant 0$; $B, D \neq 0$, то при $\sigma t \to \infty$

$$S(N_1, t) = \sqrt{\frac{\theta}{2}} \left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{-\beta-\frac{1}{2}} \left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{-\alpha-\frac{1}{2}} \left\{ \frac{1}{2} \ln N_1 \int_0^1 \left[\Phi^+\left(\exp\left(\frac{\ln N_1}{x}\right)\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \Phi^-\left(\exp\left(\frac{\ln N_1}{x}\right) + 1\right)\right] e^{\frac{\ln N_1}{x}} \frac{dx}{x^2} + \Phi_1(N_1, t) \right\}. \tag{8}$$

Здесь

$$\Phi^{\pm}(x) = \frac{\Gamma(x+\beta+1)}{\Gamma(x+1)\sqrt{r(x)}}[m(x)]^{-\beta}J_\beta[m(x)\theta][b(x)\pm c(x)][1+\varepsilon_1(x)],$$

$$\Phi_1(N_1, t) = \frac{1}{2}[\Phi^+(N_1) - \Phi^-(N_1+1)] + \cdots +$$

$$+(-1)^{k-2}\frac{B_k}{(2k-2)!}[\Phi^{+(2k-3)}(N_1) - \Phi^{-(2k-3)}(N_1+1) + \cdots;$$

$k = 2, 3, \ldots$, B_k — числа Бернулли [4]; $J_\beta(x)$ — функция Бесселя I рода мнимого аргумента; $t = -\frac{2}{\sigma}\ln\sin\frac{\theta}{2}$; $m(x) = x + \frac{1}{2}(\alpha+\beta+1)$; $r(n) = r_n$; $b(n) = b_n$ и $c(n) = c_n$ определяются из равенства

$$a_n^a = b_n + (-1)^n c_n \tag{9}$$

и выполняются условия

$$\alpha < \min\left\{\frac{3}{2},\ 2\gamma+\frac{3}{2}\right\},\ \beta < \begin{cases} \frac{2\gamma_0}{\sigma} - \frac{1}{2}, & C \neq 0, \\ \frac{2(\gamma_0+v)}{\sigma} - \frac{1}{2}, & C = 0. \end{cases}$$

Доказательство. Запишем выражение (6) в виде

$$S(N_1, t) = \sum_{n=N_1}^{\infty}(-1)^n\frac{a_n}{\sqrt{r_n}}P_n^{(\beta,\alpha)}(1-2e^{-\sigma t}) = \sum_{n=N_1}^{\infty}(-1)^n\frac{a_n}{\sqrt{r_n}}P_n^{(\beta,\alpha)}(\cos\theta). \tag{10}$$

Известно [2], что при $n \to \infty$ справедливо асимптотическое равенство

$$P_n^{(\beta,\alpha)}(\cos\theta) \approx \sqrt{\frac{\theta}{2}}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{-\beta-\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{-\alpha-\frac{1}{2}}\frac{\Gamma(n+\beta+1)}{m^\beta n!}J_\beta(m\theta) \tag{11}$$

для $0 \leqslant \theta \leqslant \pi - \frac{d}{n}$, $d = \mathrm{const}$. Из формул (4), (9), (10) и (11) получаем

$$S(N_1, t) = \sqrt{\frac{\theta}{2}}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{-\beta-\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{-\alpha-\frac{1}{2}}\sum_{n=N_1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{r_n}}\frac{\Gamma(n+\beta+1)}{m^\beta n!}\times$$

$$\times J_\beta(m\theta)[b_n + (-1)^n c_n][1+\varepsilon_1(n)]. \tag{12}$$

Не уменьшая общности, можно считать N_1 четным. Тогда из формулы (12) следует, что

$$S(N_1, t) = \sqrt{\frac{\theta}{2}}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{-\beta-\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{-\alpha-\frac{1}{2}}\left[\sum_{n=\frac{N_1}{2}}^{\infty}\Phi^+(2n) - \right.$$

$$\left. - \sum_{n=\frac{N_1}{2}}^{\infty}\Phi^-(2n+1)\right]. \tag{13}$$

Поскольку функция $\Phi^{\pm}(x)$ задана аналитически, то остатки рядов, стоящие в правой части (13), можно просуммировать, не прибегая к вычислению $\Phi^{\pm}(n)$ для каждого n. Для этого воспользуемся формулой суммирования рядов Эйлера — Маклорена [4]

$$\sum_a^b\Phi(x) = \frac{1}{h}\int_a^b\Phi(x)\,dx - \frac{1}{2}[\Phi(b) - \Phi(a)] + \cdots +$$

$$+(-1)^{k-2}\frac{B_k h^{2k-3}}{(2k-2)!}[\Phi^{(2k-3)}(b) - \Phi^{(2k-3)}(a)] + \cdots,\quad k = 2, 3, \ldots \tag{14}$$

Если применить формулу (14) к суммам в (13) при $h = 1$, $a = \frac{N_1}{2}$, $b = \infty$, получим

$$S(N_1, t) = \sqrt{\frac{\theta}{2}}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{-\beta-\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{-\alpha-\frac{1}{2}}\left\{\int\limits_{\frac{N_1}{2}}^{\infty}\Phi^{+}(2x)\,dx - \right.$$

$$\left. - \int\limits_{\frac{N_1}{2}}^{\infty}\Phi^{-}(2x+1)\,dx + \Phi_1(N_1, t)\right\}. \qquad (15)$$

Из (14) заменой переменных интегрирования приходим к (8). Теорема 1 доказана.

3. **Вычисление оригинала при $\sigma t \to 0$.** Если $\sigma t \to 0$, то имеют место рассуждения, аналогичные приведенным в п. 2, т. е. для достижения точности вычисления оригинала необходимо брать большое количество членов ряда (2). В этом случае справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Если $f(t)$, $t \in [0, \infty)$ удовлетворяет условиям теоремы 1, то при $\sigma t \to 0$

$$S(N_1, t) = \sqrt{\frac{\theta}{2}}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{-\alpha-\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{-\beta-\frac{1}{2}} \times$$

$$\times\left\{\frac{1}{2}\ln N_1\int\limits_0^1\left[\Psi^{+}\left(\exp\left(\frac{\ln N_1}{x}\right)\right) - \Psi^{-}\left(\exp\left(\frac{\ln N_1}{x}\right)+1\right)\right]e^{\frac{\ln N_1}{x}}\frac{dx}{x^2} + \right.$$

$$\left. + \Psi_1(N_1, t)\right\}, \qquad (16)$$

где

$$\Psi^{\pm}(x) = \frac{\Gamma(x+\alpha+1)}{\Gamma(x+1)\sqrt{r(x)}}[m(x)]^{-\alpha}J_{\alpha}[m(x)\theta][b(x)\pm c(x)][1+\varepsilon_1(x)],$$

$$\Psi_1(N_1, t) = \frac{1}{2}[\Psi^{+}(N_1) - \Psi^{-}(N_1+1)] + \cdots + (-1)^{k-2}\frac{B_k}{(2k-2)!}\times$$

$$\times[\Psi^{+(2k-3)}(N_1) - \Psi^{-(2k-3)}(N_1+1)] + \cdots, \quad k = 2, 3, \ldots$$

Остальные обозначения такие же, как в теореме 1.

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1.

1. *Побережный О. В., Пяныло Я. Д.* Об оценке погрешности и условиях сходимости приближенного обращения преобразования Лапласа с помощью ортогональных многочленов.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1980, вып. 12, с. 91—94.
2. *Сеге Г.* Ортогональные многочлены.— М. : Физматгиз, 1962.— 500 с.
3. *Цирулис Т. Т., Белов М. А.* Асимптотические методы исследования схемы Папулиса для приближенного обращения преобразования Лапласа. — Учен. зап. Латв. ун-та, 1973, № 292, с. 139—154.
4. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления.— М. : Наука, 1969.— Т. 2. 800 с.

Институт прикладных проблем механики
и математики АН УССР, Львов

Получено 03.12.82

УДК 517.948.33 : 518

Я. Н. Пелех

НЕЛИНЕЙНЫЕ МЕТОДЫ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА

Многие практически важные задачи механики, математической физики, техники, различные инженерные задачи сводятся к решению интегральных уравнений Вольтерра

$$\varphi(x) = \int\limits_{x_0}^{x}F[x, s, \varphi(s)]\,ds, \ x \in I_L : [x_0, x_0 + L]. \qquad (1)$$