Если снова воспользоваться формулой (2), подставив вместо $p_1^a(x)$, $p_2^A(x)$ и $p_3^L(x)$ их выражения (см. [2]), то получим теорему 2.5 из работы [2].

Аналогичное представление будет иметь место, если применить другие формулы для производных Радона — Никодима при сдвиге, линейной и соответственно нелинейной заменах. Весьма общие результаты для таких производных содержатся в работе [4].

1. *Ковальчик И. М.* Линейные операторные уравнения и континуальный интеграл по мере Гаусса.— Теория вероятностей и мат. статистика, 1980, вып. 22, с. 66—78.
2. *Ковальчик И. М.* Формулы преобразования обобщенной меры Винера в пространстве непрерывных вектор-функций двух переменных и их приложения.— Львов, 1981.— 72 с.— (Препринт / АН УССР. Физ.-мех. ин-т; № 52).
3. *Ковтун І. І.* Про розв'язок деякого нелінійного інтегрального рівняння через інтеграл Вінера.— Доп. АН УРСР. Сер. А, 1969, № 6, с. 509—514.
4. *Янович Л. А.* Приближенное вычисление континуальных интегралов по гауссовым мерам.— Минск : Наука и техника, 1976.— 384 с.

Львовский политехнический институт — Получено 17.05.82

УДК 517.63

О. В. Побережный

ПРИМЕНЕНИЕ БИОРТОГОНАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ДЛЯ ОБРАЩЕНИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

Задачу восстановления оригинала $f(t)$ по его изображению Лапласа $F(s)$ можно рассматривать как задачу решения интегрального уравнения I рода

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = F(s). \tag{1}$$

Для получения решения уравнения (1) поступим следующим образом [3]. Предполагаем, что известно преобразование Лапласа $F(s)$ функции $f(t)$ с некоторой абсциссой абсолютной сходимости γ_1. Рассмотрим преобразование (1) при условии $\operatorname{Re} s \geqslant \gamma_0 > \gamma_1$. Используя теорему смещения преобразования Лапласа, соотношение (1) можно записать так:

$$\int_0^\infty e^{-\gamma_0 t} e^{-st} f(t)\,dt = F(\gamma_0 + s). \tag{2}$$

После замены переменной $t = -\frac{\ln x}{\sigma}$ уравнение (2) примет вид

$$\int_0^1 x^{\frac{s}{\sigma}} \varphi(x)\,dx = \sigma F(\gamma_0 + s), \tag{3}$$

где обозначено $\varphi(x) = x^{\frac{\gamma_0}{\sigma}-1} f\left(-\frac{\ln x}{\sigma}\right)$, $\sigma > 0$.

Если системы функций $\xi_n(x) \in L^2$ и $\eta_n(x) \in L^2$ образуют биортонормированную систему на множестве $x \in [0, 1]$, т. е.

$$\int_0^1 \xi_n(x)\,\eta_m(x)\,dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n, \end{cases} \tag{4}$$

тогда для $\varphi(x) \in L^2$ справедливы разложения [1]

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n \xi_n(x), \quad \varphi(x) = \sum_{n=0}^\infty b_n \eta_n(x), \tag{5}$$

где

$$a_n = \int_0^1 \varphi(x)\,\eta_n(x)\,dx; \quad b_n = \int_0^1 \varphi(x)\,\xi_n(x)\,dx. \tag{6}$$

Представляя $\xi_n(x)$ и $\eta_n(x)$ в виде

$$\xi_n(x)=\sum_{j=0}^{n} c_j^n x^{\varkappa(j)},\quad \eta_n(x)=\sum_{j=0}^{n} d_j^n x^{\gamma(j)}, \tag{7}$$

из соотношений (6) с учетом (3) находим коэффициенты a_n и b_n разложения (5) через известную функцию $F(s)$:

$$a_n=\sigma\sum_{j=0}^{n} d_j^n F[\gamma_0+\sigma\gamma(j)],\quad b_n=\sigma\sum_{j=0}^{n} c_j^n F[\gamma_0+\sigma\varkappa(j)]. \tag{8}$$

Зная a_n и b_n, определяем искомую функцию

$$f(t)=e^{-(\gamma_0-\sigma)t}\sum_{n=0}^{\infty} a_n\xi_n(e^{-\sigma t})=e^{-(\gamma_0-\sigma)t}\sum_{n=0}^{n} b_n\eta_n(e^{-\sigma t}). \tag{9}$$

Как частный случай получим известную в литературе схему обращения преобразования Лапласа с помощью ортогональных многочленов [2]. Для этого достаточно положить $\xi_n(x)=\eta_n(x)$ и предположить их ортогональность.

Построение биортонормированных систем в общем случае весьма трудоемкий процесс [1]. Однако в ряде случаев для достаточно широкого класса функций такие системы можно построить довольно легко. Рассмотрим, в частности, биортогональные разложения в L^2. Имеет место следующая теорема.

Теорема. Система функций

$$\xi_n(x)=\omega_1(x)P_n^{*(\alpha,\beta)}(x),\quad \eta_n(x)=\omega_2(x)P_n^{*(\alpha,\beta)}(x) \tag{10}$$

образует биортонормированную систему на множестве $x\in[0,1]$ при условии, что

$$\omega_1(x)\,\omega_2(x)=\frac{1}{r_n}x^{\alpha}(1-x)^{\beta}, \tag{11}$$

где $P_n^{*(\alpha,\beta)}(x)$ — смещенные многочлены Якоби [4] вида

$$P_n^{*(\alpha,\beta)}(x)=\sum_{j=0}^{n}\alpha_j^n x^j=$$

$$=\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^n\Gamma(n+1+\beta)}{n!\,\Gamma(1+\beta)}\cdot\frac{a(a+1)\ldots(a+j-1)\,b(b+1)\ldots(b+j-1)}{j!\,c(c+1)\ldots(c+j-1)}x^j;$$

$$r_n=\frac{\Gamma(n+\alpha+1)\,\Gamma(n+\beta+1)}{n!\,(2n+\alpha+\beta+1)\,\Gamma(n+\alpha+\beta+1)};\quad a=n+\alpha+\beta+1; \tag{12}$$

$b=-n$; $c=1+\beta$; $\alpha>-1$; $\beta>-1$; $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция.

Доказательство. Подставляя выражения (10) в условие биортонормированности (4) и учитывая соотношение (11), приходим к условию ортонормированности смещенных многочленов Якоби с весом $x^{\alpha}(1-x)^{\beta}$ и нормирующим множителем $\frac{1}{r_n}$, что и доказывает теорему.

Для получения коэффициентов a_n и b_n разложения (5), определяемых формулами (8), необходимо иметь представление функций $\xi_n(x)$ и $\eta_n(x)$ в виде (7). Учитывая, что для смещенных многочленов Якоби представление в виде ряда по степеням x^j определяется формулой (12), из представления (10) заключаем, что $\omega_1(x)$ и $\omega_2(x)$ должны иметь аналогичные разложения. Для выполнения последнего, как видно из соотношения (11), достаточно предположить, что $\beta=k=0,1,2,\ldots$, т. е. принимает целочисленные значения k из области изменения β.

Рассмотрим примеры. Пусть

$$\omega_1(x)=\frac{x^{\alpha}}{\sqrt{r_n}},\quad \omega_2(x)=\frac{(1-x)^k}{\sqrt{r_n}},$$

тогда

$$\xi_n(x) = \frac{x^\alpha}{\sqrt{r_n}} P_n^{*(\alpha,k)}(x), \quad \eta_n(x) = \frac{(1-x)^k}{\sqrt{r_n}} P_n^{*(\alpha,k)}(x),$$

или

$$\xi_n(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j^n x^{j+\alpha}, \quad \eta_n(x) = \sum_{j=0}^{n} d_j^n \sum_{i=0}^{n} (-1)^k \binom{k}{i} x^{j+i}.$$

Коэффициенты разложения a_n и b_n в этом случае имеют вид

$$a_n = \sigma \sum_{j=0}^{n} d_j^n \sum_{i=0}^{k} (-1)^k \binom{k}{i} F[\sigma(1+i+j)], \quad b_n = \sigma \sum_{j=0}^{n} c_j^n F[\sigma(1+j+\alpha)],$$

где $d_j^n = c_j^n = \frac{1}{\sqrt{r_n}} \alpha_j^n$; $\binom{k}{i}$ — биномиальные коэффициенты. Если положить, что

$$\omega_1(x) = \frac{1}{\sqrt{r_n}}, \quad \omega_2(x) = \frac{x^\alpha (1-x)^k}{\sqrt{r_n}},$$

получим новые биортонормированные системы. В этом случае

$$\xi_n(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j^n x^j, \quad \eta_n(x) = \sum_{j=0}^{n} d_j^n \sum_{i=0}^{k} (-1)^k \binom{k}{i} x^{j+i+\alpha},$$

$$a_n = \sigma \sum_{j=0}^{n} d_j^n \sum_{i=0}^{k} (-1)^k \binom{k}{i} F[\sigma(1+j+i+\alpha)], \quad b_n = \sigma \sum_{j=0}^{n} c_j^n F[\sigma(1+j)].$$

Искомая функция $f(t)$ определяется формулой (9).

При $\alpha = 0$, $k = 0$ получаем известные в литературе результаты: обращение преобразования Лапласа с помощью смещенных многочленов Лежандра [2].

Сходимость частных сумм $\varphi_N(x)$ к $\varphi(x)$ обеспечивается [1] ограниченностью $\left|\sum_{n=0}^{N} a_n b_n\right|$ равномерно относительно N. Для рассматриваемого класса функций это легко доказывается путем построения мажорантного ряда, обладающего указанными свойствами.

1. *Качмаж С., Штейнгауз Г.* Теория ортогональных рядов.— М. : Физматгиз, 1958.— 368 с.
2. *Крылов В. И., Скобля Н. С.* Методы приближенного преобразования Фурье и обращение преобразования Лапласа.— М. : Наука, 1974.— 223 с.
3. *Побережный О. В.* О приближенном обращении преобразования Лапласа при помощи биортогональных разложений.— В кн.: Тез. докл. Второго респ. симпоз. по дифференц. и интегр. уравнениям. Одесса, 1978, с. 128—129.
4. *Сеге Г.* Ортогональные многочлены.— М. : Физматгиз, 1962.— 500 с.

Институт прикладных проблем механики
и математики АН УССР, Львов

Получено 17.03.82

УДК 517.63

Я. Д. Пяныло

ОБ ИССЛЕДОВАНИИ ПРИБЛИЖЕННОГО ОБРАЩЕНИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА С ПОМОЩЬЮ МНОГОЧЛЕНОВ ЯКОБИ

Метод приближенного обращения преобразования Лапласа с помощью многочленов Якоби заключается в следующем. Пусть известно изображение Лапласа $F(p)$ функции $f(t)$:

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt. \tag{1}$$