УДК 517.948

И. М. Ковальчик

КВАЗИЛИНЕЙНОЕ ОПЕРАТОРНОЕ УРАВНЕНИЕ И ИНТЕГРАЛ ПО МЕРЕ ГАУССА

Пусть X — вещественное локально выпуклое линейное топологическое пространство, элементами которого являются функции, в том числе и вектор-функции, или числовые последовательности. Предполагаем, что X — измеримое пространство с выделенным в нем σ-кольцом подмножеств, на которых задана мера μ такая, что $\int\limits_X \mu(dx) = 1$, $\int\limits_X Ax\mu(dx) = 0$, где A — линейное измеримое отображение $A: X \to X$, и существует $A^{-1}: X \to X$. Этими свойствами обладает, в частности, мера Гаусса со средним значением, равным нулю, или произведение таких мер. Для определенности будем предполагать, что μ — гауссова мера.

Считаем известными выражения для производных Радона—Никодима $p_1^a(x) = \frac{d\mu_a}{d\mu}(x)$ при сдвиге $x \to y = x + a$ на элемент $a \in X$, $p_2^A(x) = \frac{d\mu_A}{d\mu}(x)$ при линейном преобразовании $x \to y = x + Ax$ и $p_3^L(x) = \frac{d\mu_L}{d\mu}(x)$ при нелинейном преобразовании $x \to y = x + Lx$. При этом элемент $a \in X$ и операторы A и L удовлетворяют всем тем требованиям, при которых выражения $p_1^a(x)$, $p_2^A(x)$ и $p_3^L(x)$ имеют смысл, в частности, существует обратное преобразование L^{-1}.

Пусть x_1, $x_2 \in X$. Определим операцию $x_1 \cdot x_2 = x$, $x \in X$, совпадающую с обычным умножением, когда x_1, x_2 — скалярные функции; если же x_1, x_2 — векторы (даже с бесконечным числом компонент), то x — вектор, компоненты которого равны произведению соответствующих компонент векторов x_1 и x_2.

Рассмотрим уравнение

$$y = x + A(x \cdot x) \equiv x + Lx, \tag{1}$$

где $x \in X$ — неизвестный, а $y \in X$ — заданный элементы пространства X.

Теорема. Если существует единственное решение уравнения (1), то

$$x = \int\limits_X u p_1^{-f}(Bu)\, p_2^B(u)\, \mu(du), \tag{2}$$

где

$$f \equiv \int\limits_X u p_3^L(u)\,(p_1^{-y}(u + Lu) - 1)\,\mu(du);$$

$$Bx \equiv -2\int\limits_X A(x \cdot z)\, p_3^L(z)\, \mu(dz).$$

Доказательство. Заменим в уравнении (1) x на x_1 и x_2:

$$y_1 = x_1 + A(x_1 \cdot x_1), \quad y_2 = x_2 + A(x_2 \cdot x_2).$$

Складывая эти равенства почленно, получаем

$$y_1 + y_2 = x_1 + x_2 + A(x_1 \cdot x_1 + x_2 \cdot x_2),$$

или

$$y_1+y_2=x_1+x_2+A((x_1+x_2)\cdot(x_1+x_2))-2A(x_1\cdot x_2).$$

Пусть $x=Ry$ — решение уравнения (1). Тогда

$$Ry_1+Ry_2=y_1+y_2-A((x_1+x_2)\cdot(x_1+x_2))+2A(x_1\cdot x_2).$$

Если положить в (1) вместо x сумму x_1+x_2, то

$$R(y_1+y_2)=y_1+y_2-A((x_1+x_2)\cdot(x_1+x_2)).$$

Из последних двух уравнений следует, что

$$R(y_1+y_2)=Ry_1+Ry_2-2A(Ry_1\cdot Ry_2)$$

и, следовательно,

$$\int\limits_X R(y_1+y_2)\,\mu(dy_2)=Ry_1+\int\limits_X Ry_2\mu(dy_2)-2\int\limits_X A(Ry_1\cdot Ry_2)\,\mu(dy_2). \quad (3)$$

Преобразуем обе части равенства (3), учитывая сделанные в начале статьи предположения. Заменим переменную интегрирования y_2 в левой части (3), подвергнув ее сдвигу на элемент $-y_1$, а затем нелинейному преобразованию:

$$\int\limits_X R(y_1+y_2)\,\mu(dy_2)=\int\limits_X R(z)\,p_1^{-y_1}(z)\,\mu(dz)=\int\limits_X up_1^{-y_1}(u+Lu)\,p_3^L(u)\,\mu(du).$$

Аналогично под воздействием нелинейного оператора $x+Lx$ преобразуется выражение в правой части (3):

$$Ry_1+\int\limits_X Ry_2\mu(dy_2)-2\int\limits_X A(Ry_1\cdot Ry_2)\,\mu(dy_2)=$$

$$=Ry_1+\int up_3^L(u)\,\mu(du)-2\int\limits_X A(Ry_1\cdot u)\,p_3^L(u)\,\mu(du).$$

Теперь уравнение (3) примет вид

$$\int\limits_X up_1^{-y_1}(u+Lu)\,p_3^L(u)\,\mu(du)=x_1+\int\limits_X up_3^L(u)\,\mu(du)-$$

$$-2\int\limits_X A(x_1\cdot u)\,p_3^L(u)\,\mu(du).$$

Таким образом, получаем линейное операторное уравнение

$$(I+B)\,x=f, \quad (4)$$

где B и f определены выше. По предположению решение уравнения (1) существует и единственно. Следовательно, подставляя в (1) вместо x это решение, превращаем (1) в тождество. Тогда все равенства, в том числе и (4), превращаются в тождества и решение уравнения (4) существует. Используя основной результат статьи [1], получаем формулу (2). Теорема доказана.

Рассмотрим частные случаи.

1. $X=C$, $\mu(du)=W(du)$, A — оператор Фредгольма. Уравнение (1) имеет вид

$$y(t)=x(t)+\int\limits_0^1 K(t,\ s)\,x^2(s)\,ds.$$

Если подставить в (2) соответствующие формулы для плотностей, установленных Камероном и Мартином, то получим результат статьи [3].

2. Пусть $X=\underbrace{C_2\times\cdots\times C_2}_{p}=C_2^p$ с обобщенной мерой Винера на C_2^p и

$$y_k(t,\ s)=x_k(t,\ s)+\sum_{l=1}^{p}\int\limits_Q K_{kl}(t,\ s;\ t_1,s_1)\,x_l^2(t_1,\ s_1)\,dt_1ds_1 \quad (k=\overline{1,\ p}).$$

Если снова воспользоваться формулой (2), подставив вместо $p_1^a(x)$, $p_2^A(x)$ и $p_3^L(x)$ их выражения (см. [2]), то получим теорему 2.5 из работы [2].

Аналогичное представление будет иметь место, если применить другие формулы для производных Радона — Никодима при сдвиге, линейной и соответственно нелинейной заменах. Весьма общие результаты для таких производных содержатся в работе [4].

1. *Ковальчик И. М.* Линейные операторные уравнения и континуальный интеграл по мере Гаусса.— Теория вероятностей и мат. статистика, 1980, вып. 22, с. 66—78.
2. *Ковальчик И. М.* Формулы преобразования обобщенной меры Винера в пространстве непрерывных вектор-функций двух переменных и их приложения.— Львов, 1981.— 72 с.— (Препринт / АН УССР. Физ.-мех. ин-т; № 52).
3. *Ковтун І. І.* Про розв'язок деякого нелінійного інтегрального рівняння через інтеграл Вінера.— Доп. АН УРСР. Сер. А, 1969, № 6, с. 509—514.
4. *Янович Л. А.* Приближенное вычисление континуальных интегралов по гауссовым мерам.— Минск : Наука и техника, 1976.— 384 с.

Львовский политехнический институт
Получено 17.05.82

УДК 517.63

О. В. Побережный

ПРИМЕНЕНИЕ БИОРТОГОНАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ДЛЯ ОБРАЩЕНИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

Задачу восстановления оригинала $f(t)$ по его изображению Лапласа $F(s)$ можно рассматривать как задачу решения интегрального уравнения I рода

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = F(s). \tag{1}$$

Для получения решения уравнения (1) поступим следующим образом [3]. Предполагаем, что известно преобразование Лапласа $F(s)$ функции $f(t)$ с некоторой абсциссой абсолютной сходимости γ_1. Рассмотрим преобразование (1) при условии $\operatorname{Re} s \geqslant \gamma_0 > \gamma_1$. Используя теорему смещения преобразования Лапласа, соотношение (1) можно записать так:

$$\int_0^\infty e^{-\gamma_0 t} e^{-st} f(t)\,dt = F(\gamma_0 + s). \tag{2}$$

После замены переменной $t = -\frac{\ln x}{\sigma}$ уравнение (2) примет вид

$$\int_0^1 x^{\frac{s}{\sigma}} \varphi(x)\,dx = \sigma F(\gamma_0 + s), \tag{3}$$

где обозначено $\varphi(x) = x^{\frac{\gamma_0}{\sigma}-1} f\left(-\frac{\ln x}{\sigma}\right)$, $\sigma > 0$.

Если системы функций $\xi_n(x) \in L^2$ и $\eta_n(x) \in L^2$ образуют биортонормированную систему на множестве $x \in [0, 1]$, т. е.

$$\int_0^1 \xi_n(x)\,\eta_m(x)\,dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n, \end{cases} \tag{4}$$

тогда для $\varphi(x) \in L^2$ справедливы разложения [1]

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n \xi_n(x), \quad \varphi(x) = \sum_{n=0}^\infty b_n \eta_n(x), \tag{5}$$

где

$$a_n = \int_0^1 \varphi(x)\,\eta_n(x)\,dx; \quad b_n = \int_0^1 \varphi(x)\,\xi_n(x)\,dx. \tag{6}$$