нормального напряжения в оптимальной конструкции в зависимости от центрального угла φ. В результате оптимизации по форме удалось уменьшить массу с 1,48 до 1,35, т. е. на 8,8 %. В случае управления толщиной при неизменной форме меридиана срединной поверхности удалось уменьшить массу конструкции до 1,1, т. е. на 25, 7 %. Количество управляющих переменных равнялось 5.

На рис. 3 показано распределение толщин вдоль меридиана срединной поверхности до (сплошная линия) и после (штриховая) оптимизации. Распределение меридионального нормального напряжения при оптимизации по толщине приведено на рис. 1 (кривая *3*).

Таким образом, за счет управления толщиной при оптимизации массы оболочек вращения можно получить более существенный выигрыш, чем за счет управления формой меридиана срединной поверхности.

1. *Калнинс А.* Исследование оболочек вращения при действии симметричной и несимметричной нагрузок.— Прикл. механика, 1964, **31**, № 3, с. 112—122.
2. *Муха И. С., Савула Я. Г.* Применение метода конечных элементов к расчету труб с криволинейной осью.— Львов, 1980.— 49 с.— Рукопись деп. в ВИНИТИ, 23.07.80 № 3285-80 Деп.
3. *Розин Л. А.* Вариационные постановки задач для упругих систем.— Л. : Изд-во ЛГУ, 1978.— 224 с.
4. *Химмельблау Д.* Прикладное нелинейное программирование.— М. : Мир, 1975.— 534 с.
5. *Черных К. Ф.* Линейная теория оболочек.— Л. : Изд-во ЛГУ, 1962.— Ч. 1. 274 с.
6. *Шмит, Миура.* Новая программа ACCESS1 для анализа и синтеза оболочек.— Ракет. техника и космонавтика, 1976, **14**, № 5, с. 142—155.

Львовский университет — Получено 22.02.82

УДК 539.3

С. А. Касьянюк, Г. И. Ткачук

СИНТЕЗ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВНЕШНЕЙ НАГРУЗКИ ПРИ ЗАДАННОМ ПОЛЕ НАПРЯЖЕНИЙ ДЛЯ ЗАДАЧ ПЛОСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Задача синтеза в плоской теории упругости заключается в отыскании такого распределения внешних усилий на контуре ∂G, ограничивающем область G, которое реализует заданное поле напряжений в односвязной области $D \subset G$ (D может совпадать с G).

Известно [3], что напряжения X_y, Y_y, X_x в произвольной точке (x, y) односвязной области G, ограниченной простым замкнутым контуром ∂G, выражаются через распределение нормальных $N(t)$ и касательных $T(t)$ усилий на ∂G с помощью линейных интегральных операторов вида

$$L(x, y) = \int_a^b [\varphi(x, y, t) N(t) + \psi(x, y, t) T(t)]\, dt. \qquad (1)$$

Здесь $\varphi(x, y, t)$, $\psi(x, y, t)$, $(x, y) \in G$, $t \in [a, b]$ — ядра операторов, определяемые первой основной плоской задачей теории упругости. В силу этого обстоятельства задача синтеза сводится к решению интегрального уравнения относительно $N(t)$ и $T(t)$ или к решению системы таких уравнений. Задача решения уравнения

$$\int_a^b [\varphi(x, y, t) N(t) + \psi(x, y, t) T(t)]\, dt = \Phi(x, y), \quad (x, y) \in D, \qquad (2)$$

где $\Phi(x, y)$, $(x, y) \in D$ — заданное поле напряжений, относится к числу некорректных [4].

Одним из возможных методов регуляризации некорректной задачи (2) является предлагаемый в настоящей работе метод оптимальной аппроксимации в смысле среднеквадратического функции $\Phi(x, y)$ оператором $L(x, y)$:

$$I(N(t),\ T(t)) = \iint\limits_D w(x,\ y)\,|L(x,\ y) - \Phi(x,\ y)|^2\,dxdy, \tag{3}$$

где $w(x, y) \geqslant 0$ — весовая функция аппроксимации, а при дополнительных ограничениях — методом интерполяции оператором (1) заданных значений ω_k, $k = \overline{1, n}$ в заданных точках

$$L(x_k,\ y_k) = \omega_k, \quad k = \overline{1, n}. \tag{4}$$

Интерполяционная задача (4) подробно исследована в работе [3]. Для решения задачи минимизации функционала (3) воспользуемся идеей вариационного метода Г. М. Голузина из геометрической теории функций комплексного переменного [1]. Вычислим вариацию $\delta I = I(N^*, T^*) - I(N, T)$ при переходе в функционале от функций $N(t)$ и $T(t)$ к функциям $N^*(t)$ и $T^*(t)$:

$$N^*(t) = \begin{cases} N(t) + \lambda, & t \in L_N, \\ N(t), & t \in [a,\ b]/L_N, \end{cases}$$

$$T^*(t) = \begin{cases} T(t) + \mu, & t \in L_T, \\ T(t), & t \in [a,\ b]/L_T. \end{cases}$$

Здесь L_N, L_T — некоторые подмножества отрезка $[a,\ b]$; $[a,\ b]/L_N$, $[a,\ b]/L_T$ — дополнения L_N и L_T до $[a, b]$; λ, μ — любого знака и достаточно малы. Очевидно,

$$\delta I = 2\lambda \iint\limits_D w(x,\ y) \left\{ \int\limits_{L_N} \varphi(x,\ y,\ \tau)\,d\tau \left[\int\limits_a^b (\varphi(x,\ y,\ t)\,N(t) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \psi(x,\ y,\ t)\,T(t))\,dt - \Phi(x,\ y) \right] \right\} dxdy + 2\mu \iint\limits_D w(x,\ y) \times$$

$$\times \left\{ \int\limits_{L_T} \psi(x,\ y,\ \tau)\,d\tau \left[\int\limits_a^b (\varphi(x,\ y,\ t)\,N(t) + \psi(x,\ y,\ t)\,T(t))\,dt - \Phi(x,\ y) \right] \right\} \times$$

$$\times\,dxdy + o(\sqrt{\lambda^2 - \mu^2}). \tag{5}$$

Следовательно, если $N(t)$ и $T(t)$ минимизируют функционал (3), то с необходимостью в равенстве (5) коэффициенты при λ и μ обращаются в нуль. Необходимые условия минимума функционала (3) сводятся, таким образом, к интегральным уравнениям относительно $N(t)$ и $T(t)$:

$$\begin{aligned} &\int\limits_a^b [\alpha_N(t)\,N(t) + \alpha_T(t)\,T(t)]\,dt = A, \\ &\int\limits_a^b [\beta_N(t)\,N(t) + \beta_T(t)\,T(t)]\,dt = B, \end{aligned} \tag{6}$$

где

$$A = \iint\limits_D w(x,\ y) \left[\int\limits_a^b \varphi(x,\ y,\ t)\,dt \right] \Phi(x,\ y)\,dxdy;$$

$$B = \iint\limits_D w(x,\ y) \left[\int\limits_a^b \psi(x,\ y,\ t)\,dt \right] \Phi(x,\ y)\,dxdy;$$

$$\alpha_N(t) = \iint\limits_D w(x,\ y) \left[\int\limits_a^b \varphi(x,\ y,\ \tau)\,d\tau \right] \varphi(x,\ y,\ t)\,dxdy;$$

$$\alpha_T(t) = \iint\limits_D w(x,\ y) \left[\int\limits_a^b \varphi(x,\ y,\ \tau)\,d\tau \right] \psi(x,\ y,\ t)\,dxdy;$$

$$\beta_N(t) = \iint\limits_D w(x, y) \left[\int\limits_a^b \psi(x, y, \tau)\, d\tau \right] \varphi(x, y, t)\, dxdy;$$

$$\beta_T(t) = \iint\limits_D w(x, y) \left[\int\limits_a^b \psi(x, y, \tau)\, d\tau \right] \psi(x, y, t)\, dxdy.$$

Поскольку функционал (3) является квадратичным относительно $N(t)$ и $T(t)$, то условия (6) являются не только необходимыми, но и достаточными для минимума функционала (3). Решая систему уравнений (6), находим распределение усилий $N(t)$ и $T(t)$, оптимально аппроксимирующих заданное поле напряжений $\Phi(x, y)$, $(x, y) \in D$.

Чтобы решить поставленную задачу, необходимо учесть еще условия (4), т. е. рассмотреть систему интегральных уравнений

$$\begin{gathered} \int\limits_a^b [\alpha_N(t) N(t) + \alpha_T(t) T(t)]\, dt = A, \\ \int\limits_a^b [\beta_N(t) N(t) + \beta_T(t) T(t)]\, dt = B, \\ \int\limits_a^b [\varphi(x_k, y_k, t) N(t) + \psi(x_k, y_k, t) T(t)]\, dt = \omega_k, \quad k = \overline{1, n}. \end{gathered} \tag{7}$$

Решению такого рода систем посвящены работы [2, 3]. Среди бесчисленного множества решений системы (7) имеется единственное с минимальной нормой: $\int\limits_a^b [N^2(t) + T^2(t)]\, dt$,

$$\begin{aligned} N_0(t) &= \gamma_\alpha \alpha_N(t) + \gamma_\beta \beta_N(t) + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \varphi(x_k, y_k, t), \\ T_0(t) &= \gamma_\alpha \alpha_T(t) + \gamma_\beta \beta_T(t) + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \psi(x_k, y_k, t) \end{aligned} \tag{8}$$

с величинами $\gamma_\alpha, \gamma_\beta, \gamma_k$, $k = \overline{1, n}$, удовлетворяющими системе уравнений

$$\begin{gathered} \int\limits_a^b [\alpha_N(t) N_0(t) + \alpha_T(t) T_0(t)]\, dt = A, \\ \int\limits_a^b [\beta_N(t) N_0(t) + \beta_T(t) T_0(t)]\, dt = B, \\ \int\limits_a^b [\varphi(x_k, y_k, t) N_0(t) + \psi(x_k, y_k, t) T_0(t)]\, dt = \omega_k, \quad k = \overline{1, n}. \end{gathered} \tag{9}$$

Вычисление оператора $L_0(x, y)$, соответствующего распределению усилий $N_0(t)$ и $T_0(t)$, оптимально аппроксимирующего $\Phi(x, y)$, $(x, y) \in D$ и интерполирующего в точках $(x_k, y_k) \in G$, $k = \overline{1, n}$ значения ω_k, сводится на основании (1) к квадратурам.

Среди бесчисленного множества решений системы (7) имеется единственное с минимальной нормой

$$\max_{N, T} \{ \max_{t \in [a, b]} |N(t)|, \max_{t \in [a, b]} |T(t)| \}.$$

Это решение только вида

$$\begin{aligned} N_0(t) &= l \operatorname{sgn} \left\{ \delta_\alpha \alpha_N(t) + \delta_\beta \beta_N(t) + \sum_{k=1}^{n} \delta_k \varphi(x_k, y_k, t) \right\}, \\ T_0(t) &= l \operatorname{sgn} \left\{ \delta_\alpha \alpha_T(t) + \delta_\beta \beta_T(t) + \sum_{k=1}^{n} \delta_k \psi(x_k, y_k, t) \right\} \end{aligned} \tag{10}$$

с величинами l, δ_α, δ_β, δ_k, $k = \overline{1, n}$, удовлетворяющими системе (9). Соответствующий оператор $L_0(x, y)$ находится квадратурами.

Среди бесчисленного множества решений системы (7) имеется **единственное** с минимальной нормой

$$\int_a^b \{|N(t)| + |T(t)|\}\, dt,$$

соответствующее случаю сосредоточенных усилий, приложенных в m точках. Величины этих усилий λ_r и μ_r и координаты точек t_r их приложений вычисляются с помощью системы уравнений

$$\begin{gathered}\sum_{r=1}^{m} [\lambda_r \alpha_N(t_r) + \mu_r \alpha_T(t_r)] = A,\\ \sum_{r=1}^{m} [\lambda_r \beta_N(t_r) + \mu_r \beta_T(t_r)] = B,\\ \sum_{r=1}^{m} [\lambda_r \varphi(x_k, y_k, t_r) + \mu_r \psi(x_k, y_k, t_r)] = \omega_k, \quad k = \overline{1, n}.\end{gathered} \tag{11}$$

Возможны иные решения системы (7), минимизирующие другие функционалы и по-иному регуляризирующие рассматриваемую задачу.

В качестве примера рассмотрим задачу о нормальных усилиях (касательные тождественно обращаются в нуль), приложенных к границе полуплоскости $y < 0$ на отрезке $[-1, 1]$, $N(t) \equiv 0$ при $|t| > 1$, аппроксимирующих с весом

$$w(x, y) = -\frac{\pi}{4xy^2}[(x+1)^2 + y^2][(x-1)^2 + y^2]$$

во всех точках прямоугольника $-1 \leqslant x \leqslant 0$, $-3 \leqslant y \leqslant -1$, напряжение $X_y \equiv 1$ и интерполирующих в точке $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ значение $X_y = 0$.

Известно [3], что величина X_y в этом случае определяется оператором

$$X_y = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{y^2 (t-x) N(t)}{[(t-x)^2 + y^2]^2}\, dt,$$

поэтому

$$\varphi(x, y, t) = \frac{2}{\pi} \frac{y^2(t-x)}{[(t-x)^2 + y^2]^2},$$

$$\int_{-1}^{1} \varphi(x, y, t)\, dt = -\frac{4}{\pi} \frac{xy^2}{[(x+1)^2 + y^2][(x-1)^2 + y^2]},$$

$$A = 2,$$

$$\alpha_N(t) = \frac{1+t}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{2(1+t)}{3 + (1+t)^2} - \frac{t}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{2t}{3 + t^2}.$$

Система интегральных уравнений (7) в рассматриваемом случае принимает вид

$$\int_{-1}^{1} \left[\frac{1+t}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{2(1+t)}{3 + (1+t)^2} - \frac{t}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{2t}{3+t^2}\right] N(t)\, dt = 2,$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{tN(t)}{(1 + 4t^2)^2}\, dt = 0.$$

Ее решение с минимальной нормой $\int_{-1}^{1} N^2(t)\, dt$ (с минимальной энергией) имеет вид

$$N_0(t) = M_1 m_1(t) + M_2 m_2(t),$$

где

$$m_1(t) = \frac{t}{(1+4t^2)^2},$$

$$m_2(t) = \frac{1+t}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{2(1+t)}{3+(1+t)^2} - \frac{t}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{2t}{3+t^2},$$

$$M_1 = -\frac{2}{\Delta} \int_{-1}^{1} m_1(t)\, m_2(t)\, dt,$$

$$M_2 = \frac{2}{\Delta} \int_{-1}^{1} m_1^2(t)\, dt,$$

$$\Delta = \int_{-1}^{1} m_1^2(t)\, dt \int_{-1}^{1} m_2^2(t)\, dt - \left[\int_{-1}^{1} m_1(t)\, m_2(t)\, dt\right]^2 > 0.$$

Соответствующие усилиям $N_0(t)$ распределения напряжений X_y в полуплоскости $y < 0$ имеют вид

$$X_y(x, y) = \frac{2M_1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{y^2 m_1(t)(t-x)}{[(t-x)^2+y^2]^2}\, dt + \frac{2M_2}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{y^2 m_2(t)(t-x)}{[(t-x)^2+y^2]^2}\, dt,$$

в частности, в точке $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ $X_y = 0$.

Из-за громоздкости здесь не приводятся решения, минимизирующие нормы $\int_{-1}^{1} |N(t)|\, dt$ и $\max_{t \in [-1,1]} |N(t)|$.

1. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного.— М. : Наука, 1966.— 524 с.
2. *Касьянюк* С. А. К методу моментов в теории оптимального управления.— Автоматика и телемеханика, 1970, № 8, с. 169—171.
3. *Касьянюк С. А., Ткачук Г. И.* Об одном классе экстремальных задач математической теории упругости.— Прикл. механика, 1971, 7, вып. 9, с. 57—63.
4. *Тихонов А. Н.* О регуляризации некорректно поставленных задач.— Докл. АН СССР, 1963, **151**, № 3, с. 501—504.

Киевский институт инженеров
гражданской авиации

Получено 20.03.81

УДК 539.385

А. П. Поддубняк

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ ВОЛНЫ КРУЧЕНИЯ НА ДВУХСЛОЙНОЙ УПРУГОЙ СФЕРЕ

Пусть на двухслойную упругую сферу в упругой среде набегает плоская волна кручения (рис. 1), вызывающая тангенциальные смещения

$$u'_\varphi(r, \theta, \tau) = u_0 r \sin\theta f(\tau + r\cos\theta), \quad f(\tau) = 0, \quad \tau \leqslant 0. \tag{1}$$

Здесь и далее u_0 — постоянная, имеющая размерность смещения; r, θ, φ — сферические координаты с началом отсчета в центре рассеивателя; $f(\tau)$ — закон изменения импульса во времени; $\tau = ct/a$; c_0, c_1, c_2 и ρ_0, ρ_1, ρ_2 — объемные скорости волн сдвига и плотность материалов соответственно во внешней среде, оболочке и заполнителе; t — время; a, b — радиусы оболочки; $\varepsilon = b/a < 1$. Все линейные характеристики задачи отнесены к внешнему радиусу оболочки a.

Для определения переизлученного сигнала необходимо решить дифференциальные уравнения крутильных колебаний [1]

$$-\frac{\partial(r\omega_\theta)}{\partial r} + \frac{\partial\omega_r}{\partial\theta} = \frac{r}{2} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial\tau^2},$$