

8. Снеддон И. Преобразования Фурье. — М.: Изд-во иностр. лит., 1955. — 667 с.
 9. Харазов Д. Ф. О линейных интегральных уравнениях с обобщенными ядрами Шмидта. — Тр. Тбил. мат. ин-та АН ГССР, 1948, 16, с. 143—169.
 10. Харазов Д. Ф. О собственных значениях мероморфных ядер интегральных уравнений. — Сообщ. АН ГССР, 1946, 7, № 7, с. 413—420.

Институт прикладных проблем
 механики и математики АН УССР, Львов
 Львовский политехнический
 институт

Получено 28.07.82

УДК 539.3

В. Л. Рвачев, В. П. Тицкий, А. Н. Шевченко

**К РЕШЕНИЮ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ
 ДЛЯ ТОНКИХ ИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН СЛОЖНОЙ ГЕОМЕТРИИ**

При решении задачи будем пользоваться гипотезой Кирхгофа — Лява о недеформируемости нормального элемента к срединной поверхности пластины. Эффект связанности в предлагаемой статье не учитывается.

Рассмотрим тонкую пластинку толщиной h . Расположим ее срединную поверхность в плоскости xOy декартовой системы координат [4]. Пусть на поверхностях $z = \pm h/2$ и на контуре Γ происходит конвективный стационарный теплообмен. Предположим, что по толщине пластины температура изменяется по линейному закону

$$T(x, y, z) = T_0(x, y) + T_1(x, y)z. \quad (1)$$

Стационарное температурное поле (1) должно удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (2)$$

и граничным условиям

$$\frac{\partial T}{\partial n} + \frac{\alpha}{\lambda_q} (T - \Theta_L)|_{\Gamma} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\alpha}{\lambda_q} (T - \Theta_1)|_{z=+h/2} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} - \frac{\alpha}{\lambda_q} (T - \Theta_2)|_{z=-h/2} = 0. \quad (5)$$

Здесь α , Θ_L , Θ_1 , Θ_2 — коэффициенты теплоотдачи и температура среды на контуре Γ , на поверхностях $z = h/2$, $z = -h/2$ соответственно; λ_q — коэффициент теплопроводности материала.

Как известно [1], решение уравнения (2) при граничных условиях (3) — (5), пользуясь представлением (1), можно привести к двум краевым задачам относительно функций $T_0(x, y)$ и $T_1(x, y)$:

$$\frac{\partial^2 T_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_0}{\partial y^2} - \frac{\alpha}{\lambda_q} \frac{1}{h} \left(T_0 - \frac{\Theta_1 + \Theta_2}{2} \right) = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial T_0}{\partial n} + \frac{\alpha}{\lambda_q} (T_0 - \Theta_L)|_{\Gamma} = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2} - \frac{6}{\lambda_q h^2} (2\lambda_q + \alpha h) \left[T_1 - \frac{\alpha(\Theta_1 - \Theta_2)}{2\lambda_q + \alpha h} \right], \quad (8)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial n} - \frac{\alpha}{\lambda_q} (T_1 - \Theta_L)|_{\Gamma} = 0. \quad (9)$$

Считаем, что растяжение пластины не влияет на ее изгиб. Рассмотрим пластину, часть контура которой Γ_1 жестко заделана, а другая часть контура Γ_2 шарнирно оперта. Как известно [1], при нагреве такой пластины температурным полем (1) будут возникать напряжения растяжения и изги-

ба. Рассмотрим только напряжения изгиба, которые определяются распределением $T_1(x, y)$. Тогда напряженное состояние изгиба можно выразить через прогиб $W(x, y)$, являющийся решением краевой задачи:

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} - \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = -\alpha_T (1 + \nu) \left(\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2} \right), \quad (10)$$

$$W|_{\Gamma=\Gamma_1 \cup \Gamma_2} = 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial W}{\partial n} \Big|_{\Gamma_1} = 0, \quad (12)$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial n^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} \Big|_{\Gamma_2} = 0. \quad (13)$$

Здесь α_T — коэффициент теплового расширения материала; $\nu = 0,3$ — коэффициент Пуассона; n, τ — естественные координаты на контуре Γ . Структуру решения температурной задачи (8), (9) ищем в виде [2]

$$T = \Phi_0 - \omega \left[D_1 \Phi_0 - \frac{\alpha}{\lambda_q} \Phi_0 \right] - \omega \frac{\alpha}{\lambda_q} \Theta_4. \quad (14)$$

Причем функция $\omega(x, y)$ удовлетворяет условиям

$$\omega|_{\Gamma} = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = -1, \quad \omega > 0 \quad \forall x, y \in \Omega, \quad (15)$$

где Ω — область, ограниченная контуром Γ ; дифференциальный оператор D_1 имеет вид [2]

$$D_1 = \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y}, \quad (16)$$

а функцию Φ_0 можно представить функциональным рядом

$$\Phi_0 = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \Phi_i. \quad (17)$$

Здесь $\{\Phi_i\}_{i=1}^{\infty}$ — некоторая полная система функций в пространстве $L_2(\Omega)$. Произвольные постоянные определяются методом Бубнова — Галеркина.

Структуру решения краевой задачи (10) — (13) представим в виде [5]

$$W = u(\Phi_0^{(1)} - \omega_2 D_1^{(2)} \Phi_0^{(1)}). \quad (18)$$

При этом функция $u(x, y)$ точно удовлетворяет граничным условиям (11) — (13), функция $\omega_2(x, y)$ обладает свойствами

$$\omega_2|_{\Gamma_2} = 0, \quad \frac{\partial \omega_2}{\partial n} \Big|_{\Gamma_2} = -1, \quad \omega_2 > 0 \quad \forall x, y \in \Omega, \quad (19)$$

дифференциальный оператор $D_1^{(2)}$ имеет вид

$$D_1^{(2)} = \frac{\partial \omega_2}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \omega_2}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y}, \quad (20)$$

функция $\Phi_0^{(1)}$ имеет структуру

$$\Phi_0^{(1)} = \sum_{i=1}^{\infty} c_i^{(1)} \Phi_i. \quad (21)$$

Нетрудно видеть, что структура (18) точно удовлетворяет граничным условиям (11) — (13). Произвольные постоянные $c_i^{(1)}$ находили из условия минимума полной энергии пластинки, которая имеет вид [4]

$$J[W] = \iint_{\Omega} \left\{ \frac{D}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right] - Wq \right\} dx dy, \quad (22)$$

где D — цилиндрическая жесткость пластины [4]; q — интенсивность поперечной нагрузки, которая вычисляется по формуле [1]

$$q(x, y) = -(1 + \nu) \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right). \quad (23)$$

Пример 1 (тестовый). Пусть пластинка имеет форму квадрата со стороной $2a = 20$ и толщиной $h = 2$. Поместим центр квадрата в начале координат. Тестовая температурная задача сводится к решению дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - 4T = 1 - x^2 - y^2 \quad (24)$$

с краевыми условиями

$$\frac{\partial T}{\partial n} + \frac{1}{3} T|_{x=\pm 10} = \frac{1}{12} (160 + y^2), \quad (25)$$

$$\frac{\partial T}{\partial n} + \frac{1}{3} T|_{y=\pm 10} = \frac{1}{12} (160 + x^2).$$

В этом случае известно точное решение $T = 0,25(x^2 + y^2)$. Приближенное решение, полученное при 14-й степени аппроксимирующего

полинома, отличается от точного в точках по области Ω не более чем на 0,05%. Затем решаем упругую задачу для пластинки, две стороны которой жестко заделаны, а две другие свободно опертые. С этой целью конструируем функцию $u(x, y)$ в виде

$$u(x, y) = f_1 + f_2 - \sqrt{f_1^2 + f_2^2} - 2f_1 f_2 (1 - \gamma \omega_2^2). \quad (26)$$

Здесь

$$f_1 = \left(\frac{100 - y^2}{100} \right)^2, \quad f_2 = \cos \frac{\pi x}{20}, \quad \omega_2 = \frac{100 - x^2}{20}, \quad \gamma = 0,1.$$

Легко убедиться, что функция $\omega(x, y)$ удовлетворяет условиям (11) — (13).

Подставляя структуру (18) в функционал (22) и минимизируя его, получаем приближенное решение упругой задачи. Приведем численные результаты:

$$W(0, 0) \frac{D}{\alpha_T (1 + \nu)} = 304,38,$$

$$M_x(0, 0) \frac{1}{\alpha_T (1 + \nu)} =$$

$$= 9,78, \quad M_y(0, 0) \frac{1}{\alpha_T (1 + \nu)} = 13,30,$$

$$M_x(0, a) \frac{1}{\alpha_T (1 + \nu)} = -7,80, \quad M_y(0, a) \frac{1}{\alpha_T (1 + \nu)} = -26,00.$$

Анализируя полученные результаты, отмечаем, что приближенное решение по прогибам отличается от точного не более чем на 0,15%, по моментам: в центре — на 0,2%; в точке с координатами $(0, a)$ — на 5%.

Пример 2. Пластинка такая же, как и в примере 1, но температурное поле описывается дифференциальным уравнением (24) с краевым условием

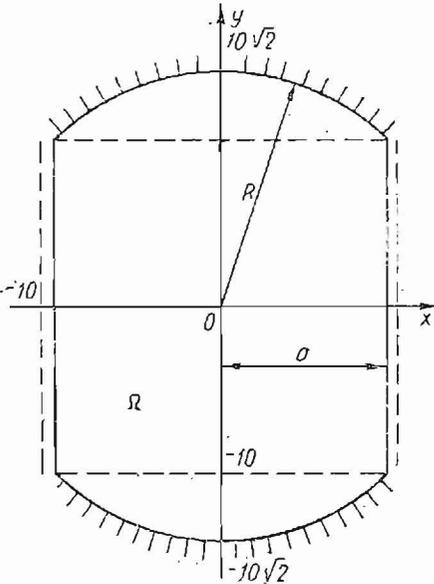
$$\frac{\partial T}{\partial n} + \frac{1}{3} T|_{\Gamma} = 3. \quad (27)$$

Упругая задача такая же, что и в примере 1. Результаты:

$$W(0, 0) \frac{D}{\alpha_T (1 + \nu)} = 265,42,$$

$$M_x(0, 0) \frac{1}{\alpha_T (1 + \nu)} = 9,16, \quad M_y(0, 0) \frac{1}{\alpha_T (1 + \nu)} = 11,74,$$

$$M_x(0, a) \frac{1}{\alpha_T (1 + \nu)} = -5,89, \quad M_y(0, a) \frac{1}{\alpha_T (1 + \nu)} = -19,64.$$



Пример 3. Рассмотрим пластинку, показанную на рисунке. Пусть поверхность $z = \frac{h}{2}$ подогревается температурой $\Theta_1 = \frac{8}{3}(1 - x^2 - y^2)$, $\Theta_L = 9$, $\Theta_2 = 0$, $\alpha/\lambda q = \frac{1}{3}$. При решении упругой задачи функция $u(x, y)$ выбиралась в форме (26), причем

$$f_1 = \left(\frac{200 - x^2 - y^2}{200} \right)^2, \quad f_2 = \cos \frac{\pi x}{20}, \quad \omega_2 = \frac{100 - x^2}{20}, \quad \gamma = 0,1.$$

Результаты:

$$W(0, 0) \frac{D}{\alpha_T(1+\nu)} = 536,50,$$

$$M_x(0, 0) \frac{1}{\alpha_T(1+\nu)} = 7,08, \quad M_y(0, 0) \frac{1}{\alpha_T(1+\nu)} = 14,77,$$

$$M_x(0, R) \frac{1}{\alpha_T(1+\nu)} = -5,15; \quad M_y(0, R) \frac{1}{\alpha_T(1+\nu)} = -17,17.$$

Следует отметить, что при решении краевых задач термоупругости использовались языковые и программные средства [3].

1. Коваленко А. Д. Основы термоупругости.— Киев : Наук. думка, 1970.— 308 с.
2. Рвачев В. Л. Методы алгебры логики в математической физике.— Киев : Наук. думка, 1974.— 260 с.
3. Рвачев В. Л., Манько Г. П., Шевченко А. Н. Краткая характеристика языка программирования *RL-1*, ориентированного на расчет полей методом *R*-функций.— Кибернетика, 1977, № 1, с. 1—5.
4. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки.— М. : Физматгиз, 1963.— 635 с.
5. Тицкий В. П. Исследование напряженно-деформированного состояния призматических тел, подвергающихся изгибу и кручению с помощью *R*-функций : Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Минск, 1978.— 17 с.

Институт проблем
машиностроения АН УССР,
Харьков

Получено 19.04.82

УДК 517.944

М. П. Ленюк, Л. К. Шеляг

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ УПРУГОГО ПРОСТРАНСТВА С СИММЕТРИЧНОЙ ПОЛОСТЬЮ ПРИ СЛУЧАЙНЫХ ВО ВРЕМЕНИ ТЕПЛОВЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

1. Постановка задачи. Рассмотрим изотропное однородное упругое пространство с симметричной полостью радиуса R , имеющее при $t \leq 0$ всюду нулевую температуру. Пусть при $t > 0$ на поверхности полости $r = R$ осуществляется теплообмен по обобщенному закону Ньютона со средой, температура которой $T_2(t)$, а в пространстве $r > R$ действуют непрерывно распределенные тепловые источники плотности $f(r, t)$. Предполагаем, что: а) поверхность полости свободна от радиальных напряжений; б) функцию $f(r, t)$ можно представить в виде произведения $f_1(r) T_1(t)$ или суммы таких произведений: в) $T_k(t)$ ($k = 1, 2$) — стационарные в широком смысле случайные функции времени [5], а $f_1(r)$ — детерминированная функция; г) реализации функции $T_2(t)$ выходят из нуля, т. е. $T_2(0) = 0$ с вероятностью, равной единице.

Напряженное состояние в таком пространстве описывают функции $T(r, t)$ и $u(r, t)$, являющиеся решениями задачи [3, 4]

$$-\left(b_0^2 \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + b_1^2 \frac{\partial T}{\partial t} \right) + \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2\alpha + 1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) = f(r, t), \quad (1)$$

$$T|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} r^{\alpha+1/2} T = 0,$$