

О. В. Побережный

О РЕШЕНИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ТЕЛ С ТРЕЩИНАМИ

В работах [3, 4] получены интегральные уравнения нестационарных задач теплопроводности для тел с трещинами, решение которых не всегда удается получить на всем диапазоне времен. В работе предлагается способ построения решений интегральных уравнений на всем диапазоне времен, основанный на использовании асимптотических методов и приближенного обращения преобразования Лапласа.

Рассмотрим интегральное уравнение вида

$$\int_S \int_0^t \varphi(s, \tau) K(r, t - \tau) ds d\tau = f(s_0, t), \quad (1)$$

где $\varphi(s, \tau)$ — искомая функция; $K(r, t - \tau)$ — ядро интегрального уравнения; $f(s_0, t)$ — заданная функция; S — произвольная кривая или поверхность Ляпунова; s, s_0 — координаты двух точек S , расстояние между которыми обозначено через r ; t — временная координата. Относительно уравнения (1) предполагаем, что после применения к нему преобразования Лапласа оно приводится к интегральному уравнению, допускающему асимптотические решения [1]:

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(s, p) &= \bar{\varphi}_1(s, p) \text{ при малых } p, \\ \bar{\varphi}(s, p) &= \bar{\varphi}_2(s, p) \text{ при больших } p, \end{aligned} \quad (2)$$

(p вещественные). Черточкой обозначена трансформанта Лапласа по времени, p — параметр преобразования Лапласа.

Применяя к выражениям (2) теоремы операционного исчисления [2, 6], находим поведение функции при $t \rightarrow 0$ и $t \rightarrow \infty$.

Если поведение искомой функции $\varphi(s, t)$ по t в окрестностях нуля и бесконечности имеет вид

$$\varphi(s, t) = \begin{cases} A + Bt^\gamma e^{-ut^\nu} \ln^{q'} t, & t \rightarrow 0, \\ C + Dt^\delta e^{-vt} \ln^{q''} t, & t \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (3)$$

то приближенное решение интегрального уравнения (1) можно представить в виде

$$\varphi^{(n)}(s, t) = h(t) \left\{ \sum_{n=0}^N a_n^{(n)} p_n(e^{-\sigma t}) + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n^{(a)} p_n(e^{-\sigma t}) \right\}, \quad (4)$$

где $A, B, C, D, \gamma, \delta, q', q'', u, v$ — произвольные функции s ; $B, D \neq 0$; $u, v \geq 0$; $a_n^{(a)}$ — асимптотические коэффициенты [5] разложения оригинала $\varphi(s, t)$ в ряд по смещенным многочленам Якоби $p_n(x)$; $h(t)$ — весовая функция;

$$a_n^{(n)} = \sigma \sum_{j=0}^n \alpha_j^n \begin{cases} \bar{\varphi}_1(s, j\sigma), & \sigma < \sigma', \\ \bar{\varphi}_2(s, j\sigma), & \sigma > \sigma''; \end{cases} \quad (5)$$

α_j^n — коэффициенты разложения $p_n(x)$ в ряд по степеням x^j ; $\sigma > 0$, $0 \leq t \leq \infty$.

Возможность представления (4), когда $\bar{\varphi}(s, p)$ известна на всем интервале значений p в полуплоскости аналитичности $\operatorname{Re} p \geq \gamma_0$, доказана в работе [5]. В этом случае имеем

$$\varphi(s, t) = h(t) \left\{ \sum_{n=0}^N a_n p_n(e^{-\sigma t}) + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n^{(a)} p_n(e^{-\sigma t}) \right\}, \quad (6)$$

$$a_n = \sigma \sum_{j=0}^n \alpha_j^n \bar{\varphi}(s, j\sigma). \quad (7)$$

Покажем, что выбором σ ($\sigma < \sigma'$ для функции $\bar{\varphi}_1(s, p)$ и $\sigma > \sigma''$ для функции $\bar{\varphi}_2(s, p)$) можно добиться сколь угодно малой разности между решениями (4) и (6). Для этого рассмотрим разность

$$\varphi(s, t) - \varphi^{(m)}(s, t) = h(t) \sum_{n=0}^{N_1} (a_n - a_n^{(m)}) p_n(e^{-\sigma t}). \quad (8)$$

Коэффициенты ряда (8) имеют вид

$$a_n - a_n^{(m)} = \sum_{j=0}^n \alpha_j^n \sigma \left[\bar{\varphi}(s, j\sigma) - \begin{cases} \bar{\varphi}_1(s, j\sigma), & \sigma < \sigma' \\ \bar{\varphi}_2(s, j\sigma), & \sigma > \sigma'' \end{cases} \right]. \quad (9)$$

Из свойств асимптотических решений следует, что всегда можно подобрать такие σ' для $\bar{\varphi}_1(s, p)$ и σ'' для $\bar{\varphi}_2(s, p)$, чтобы для всех j из интервала $0 \leq j \leq N$ выполнялись неравенства

$$|\bar{\varphi}(s, j\sigma') - \bar{\varphi}_1(s, j\sigma')| \leq \frac{\varepsilon}{\sigma' c'_\varepsilon}, \quad (10)$$

$$|\bar{\varphi}(s, j\sigma'') - \bar{\varphi}_2(s, j\sigma'')| \leq \frac{\varepsilon}{\sigma'' c''_\varepsilon}, \quad (11)$$

где

$$c'_\varepsilon = h(t) \sum_{n=0}^N \sum_{j=0}^n |\alpha_j^n| |p_n(e^{-\sigma' t})|, \quad (12)$$

$$c''_\varepsilon = h(t) \sum_{n=0}^N \sum_{j=0}^n |\alpha_j^n| |p_n(e^{-\sigma'' t})|.$$

Величины c'_ε , c''_ε представляют собой для конкретного t конечные числа, так как суммы (12) конечные и все величины в них ограничены. В ряде случаев можно найти единое c_ε для всего интервала времени. Подставляя неравенство (10) или (11) в соотношение (8), находим

$$|\varphi(s, t) - \varphi^{(m)}(s, t)| \leq \varepsilon. \quad (13)$$

Очевидно, что предложенный способ построения приближенного решения интегрального уравнения может быть применен для нахождения решения систем интегральных уравнений при условии существования асимптотических решений.

Отметим, что для решения, представленного формулой (6), в работе [5] были выведены условия сходимости и оценки погрешности. Очевидно, что решение $\varphi^{(m)}(s, t)$ с учетом формул (13) будет обладать теми же свойствами.

Пример. Рассмотрим задачу об определении нестационарного температурного поля в пластинке с теплоизолированной прямолинейной трещиной. Интегральное уравнение рассматриваемой задачи имеет вид [3]

$$\begin{aligned} & \frac{1}{8\pi c} \int_{-l}^l \int_0^t \frac{\psi'(\xi, \tau)}{(t-\tau)^2} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4c(t-\tau)}\right] (x-\xi) d\tau d\xi - \\ & - \frac{1}{4\pi c} \int_{-l}^l \int_0^t \frac{\psi(\xi, \tau)}{(t-\xi)^2} \left[\frac{(x-\xi)^2}{4c(t-\tau)} - 1\right] \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4c(t-\tau)}\right] d\tau d\xi = -q, \end{aligned} \quad (14)$$

где c — температуропроводность пластинки; $2l$ — длина трещины; $q = \text{const}$; $\psi(\xi, t)$ — искомая функция; t — время.

Применяя к уравнению (14) интегральное преобразование Лапласа, после некоторых выкладок получаем

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \bar{\psi}'(\xi, p_*) K(\omega) d\xi = -\frac{q}{p_* \sqrt{p_*}}. \quad (15)$$

Здесь

$$K(\omega) = K_1(\omega) + \int_0^{\omega} K_0(\omega) d\omega; \quad \omega = \sqrt{p_*}(\xi - x); \quad p_* = \frac{\rho l^2}{c};$$

$K_0(\omega)$, $K_1(\omega)$ — функции Макдональда.

Методы нахождения асимптотических решений уравнения вида (15) хорошо разработаны в работе [1]. Применяя эти методы, находим асимптотические решения уравнения (15) соответственно при малых и больших параметрах p_* :

$$\bar{\psi}_1(x, p_*) = \frac{q}{p_*} \sum_{k=0}^2 d_{2k+1} (1-x^2)^{k+\frac{1}{2}}, \quad p_* \rightarrow 0, \quad (16)$$

$$\bar{\psi}_2(x, p_*) = \frac{2q}{p_* \sqrt{p_*}} \left\{ \operatorname{erf} \sqrt{\sqrt{p_*}(1+x)} + \operatorname{erf} \sqrt{\sqrt{p_*}(1-x)} - \right. \\ \left. - \operatorname{erf} \sqrt{2\sqrt{p_*}} \right\}, \quad p_* \rightarrow \infty,$$

где

$$d_1 = 2 \left[1 + (0,25 \ln \sqrt{p_*} - 0,3272) p_* + (0,0625 \ln^2 \sqrt{p_*} - 0,1253 \ln \sqrt{p_*} - 0,0253) p_*^2 \right], \\ d_3 = -2 \left[0,0833 p_* + (0,0313 \ln \sqrt{p_*} - 0,1228) p_*^2 \right],$$

$$d_5 = 0,0062 p_*^2, \quad \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2} dx.$$

Из соотношений (16) легко установить поведение функции $\psi(x, t_*)$

при $t_* \rightarrow 0$ и $t_* \rightarrow \infty$ ($t_* = \frac{ct}{l^2}$). В рассматриваемом случае имеем

$$\psi_2(x, t_*) = 2q \left\{ t_*^{1/2} + \frac{t_*^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-1/t_*} - \frac{4\sqrt{2}}{\pi} \frac{t_*^2}{(1+x)^3} e^{-\frac{(1+x)^2}{4t_*}} - \right. \\ \left. - \frac{4\sqrt{2}}{\pi} \frac{t_*^2}{(1-x)^3} e^{-\frac{(1-x)^2}{4t_*}} + \dots \right\}, \quad t_* \rightarrow 0, \quad (17)$$

$$\psi_1(x, t_*) = 2q \left\{ (1-x^2)^{1/2} - 0,125(1-x^2)^{1/2} \frac{1}{t_*} - \frac{1}{32} (1-x^2)^{1/2} \frac{\ln t_*}{t_*^2} - \right. \\ \left. - [0,04943(1-x^2)^{1/2} + 0,01565(1-x^2)^{3/2}] \frac{1}{t_*^2} + \dots \right\}, \quad t_* \rightarrow \infty.$$

Используя выражения (17) и результаты работы [5], находим асимптотические коэффициенты $a_n^{(a)}$ разложения (4). Коэффициенты $a_n^{(n)}$ определялись второй из формул (5). Для выбора числа N использовали условия совпадения с заданной точностью асимптотических коэффициентов $a_n^{(a)}$ и коэффициентов $a_n^{(n)}$ при больших σ ; правильность выбора последнего проверялась из условия совпадения значений $\varphi^{(n)}(x, t)$, подсчитанных по формуле (4) со значениями $\psi_2(x, t_*)$ при $t_* \rightarrow 0$ и $\psi_1(x, t_*)$ при $t_* \rightarrow \infty$ с заданной точностью.

На рисунке приведены зависимости $\psi_1(0, t_*)$ (штриховая линия), $\psi_2(0, t_*)$ (штрихпунктирная) и $\psi^{(n)}(0, t_*)$ (сплошная) от безразмерного времени. Как видно из рисунка, в интервале $0 \leq t_* \leq 0,3$ функция $\psi^{(n)}(0, t_*)$ практически совпадает с функцией $\psi_2(0, t_*)$; при $t_* = 7$ раз-

ность между $\psi^{(m)}(0, t_*)$ и $\psi_1(0, t_*)$ составляет около 1 % и с течением времени уменьшается.

Предлагаемый способ построения решения интегральных уравнений может быть использован также для восстановления оригинала при преобразовании Лапласа по известному его изображению только при малых и больших вещественных значениях параметра преобразования.

1. Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А. Неклассические смешанные задачи теории упругости.— М.: Наука, 1974.— 455 с.
2. Диткин В. А., Прудников А. П. Операционное исчисление.— М.: Высш. шк., 1975.— 407 с.
3. Кит Г. С., Побережный О. В. Интегральные уравнения нестационарных задач теплопроводности для тел с трещинами.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1980, вып. 12, с. 58—63.
4. Побережный О. В. Задачи нестационарной теплопроводности для полосы и слоя с трещинами.— Там же, 1982, вып. 15, с. 84—89.
5. Побережный О. В., Пяныло Я. Д. Об оценке погрешности и условиях сходимости приближенного обращения преобразования Лапласа с помощью ортогональных многочленов.— Там же, 1980, вып. 12, с. 91—94.
6. Риекстыньш Э. Я. Асимптотические разложения интегралов.— Рига: Зинатне, 1977.— Т. 2. 464 с.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР,
Львов

Получено 17.03.82

УДК 536.2 : 539.377

Я. С. Подстригач, Б. С. Воробец, Ю. А. Чернуха

ТЕМПЕРАТУРНЫЕ ПОЛЯ ОБОЛОЧЕК С ПОКРЫТИЯМИ И ЗАПОЛНИТЕЛЕМ

В данной статье выведены уравнения нестационарной теплопроводности тонких оболочек с покрытием и наполнителем, определено температурное поле цилиндрической оболочки с покрытием при индукционном нагреве по кольцевой зоне, исследовано влияние теплофизических параметров покрытия и наполнителя, а также ширины зоны нагрева на распределение температуры в оболочке.

Уравнения теплопроводности оболочек с покрытием и с наполнителем. Рассмотрим оболочку с покрытием и наполнителем. Оболочку и покрытие отнесем к триортогональным системам координатных линий α , β , γ , являющихся соответственно линиями главных кривизн их срединных поверхностей и внешними нормальными к ним. Индекс «1» относит соответствующие величины к покрытию, а «2» — к оболочке. Пусть t_i — соответствующая температура; A_i , B_i — коэффициенты Ламе срединной поверхности; k_{1i} , k_{2i} — кривизны координатных линий; $2h_i$ — толщина; $\lambda_i^{(\alpha)}$, $\lambda_i^{(\beta)}$, $\lambda_i^{(\gamma)}$ и c_i — коэффициенты теплопроводности и теплоемкость материалов; q_i — плотность источников тепла; τ — время.

В качестве исходных для описания процесса теплопроводности в объемах, занимаемых материалами оболочки и покрытия, примем уравнение трехмерной задачи теплопроводности [4]

$$\frac{\partial^2 t_i}{\partial \gamma_i^2} + 2k_i \frac{\partial t_i}{\partial \gamma_i} + p_{*i}^2 t_i + \frac{1}{\lambda_i^{(\gamma)}} q_i = 0 \quad (2k_i = k_{1i} + k_{2i}), \quad (1)$$

$$p_{*i}^2 = \frac{1}{\lambda_i^{(\gamma)}} \left\{ \frac{1}{A_i B_i} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\lambda_i^{(\alpha)} \frac{B_i}{A_i} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\lambda_i^{(\beta)} \frac{A_i}{B_i} \frac{\partial}{\partial \beta} \right) \right] - c_i \frac{\partial}{\partial \tau} \right\}.$$

Считаем, что между оболочкой и покрытием осуществляется идеальный тепловой контакт, а теплообмен с окружающей средой происходит по зако-