В этих обозначениях, как видно из равенства (6), все выражения $r_{np}(x)$ — многочлены. Очевидной проверкой убеждаемся в справедливости следующего равенства:

$$\left\| \begin{matrix} \Delta(x) E_{n-1} & 0 \\ -\bar{b}(x) & 1 \end{matrix} \right\| \| s_{uv} \| = \| r_{uv}(x) \| \left\| \begin{matrix} \Delta(x) E_{n-1} & 0 \\ -\bar{c}(x) & 1 \end{matrix} \right\|,$$

где матрицы $\| s_{uv} \|$, $\| r_{uv}(x) \|$ обратимые. Перейдя в последнем равенстве к взаимным матрицам, получаем, что матрицы $F(x)$ и $G(x)$, следовательно, матрицы $A(x)$ и $B(x)$ полускалярно эквивалентные.

Из теоремы 1 и предложения 2 вытекает следующая теорема.

Теорема 2. Для полускалярной эквивалентности матриц $A(x)$ и $B(x)$ необходимо и достаточно выполнение условий 1) и 2) предложения 2 для матриц M_F и M_G.

На основании работы [1] справедлива такая теорема.

Теорема 3. Если матрицы $A(x)$ и $B(x)$ унитальны, то для их подобия необходимо и достаточно выполнение условия теоремы 1.

1. *Казімірський П. С., Петричкович В. М.* Про еквівалентність поліноміальних матриць.— В кн.: Теоретичні та прикладні питання алгебри і диференціальних рівнянь. К. : Наук. думка, 1977, с. 61—66.
2. *Казімірський П. С.* Квазіунітальні та супровідні матриці матричних многочленів.— Там же, с. 29—52.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР,
Львов

Получено 06.01.82

УДК 517.348

В. А. Козицкий

БЕСКОНЕЧНАЯ АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ СИСТЕМА С БЛОЧНО-ТЕПЛИЦЕВОЙ МАТРИЦЕЙ И ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМИ МНОЖИТЕЛЯМИ

В задачах теории дифракции играют роль бесконечные алгебраические системы типа свертки с переменными коэффициентами. Рассмотрим одну из них (всюду суммирование от $-\infty$ до $+\infty$)

$$\begin{gathered} \sum_k a_{n-k}^{11} v_k - R^n \sum_k a_{n-k}^{12} u_k = g_n^1, \\ \sum_k a_{n-k}^{21} u_k - r^n \sum_k a_{n-k}^{22} v_k = g_n^2, \quad n = 0, \pm 1, \ldots \end{gathered} \tag{1}$$

При традиционных предположениях $\{g_n^i\} \in l_2$, $\{a_n^{ij}\} \in l_1$, $i, j = 1, 2$ составляющие $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ решения ищутся в l_2. Примем также, что R и r действительные и $1 > R \geqslant r > 0$. Пусть решение системы (1) существует. С целью приведения ее к задаче теории аналитических функций сделаем замену

$$\psi_n = \sum_k a_{n-k}^{12} u_k, \quad \varphi_n = \sum_k a_{n-k}^{22} v_k.$$

Пространство последовательностей $\{f_n\}$ таких, что $\{f_n\} \in l_2$ и $\{\rho^n f_n\} \in l_2$, обозначим через $\{\rho, 1\}$ (сравни с работой [1]). Легко видеть, что $\{\psi_n\} \in \{R, 1\}$ и $\{\varphi_n\} \in \{r, 1\}$. Введем еще пространство $\{\{\rho, 1\}\}$ функций $F(z)$, аналитических в кольце $\rho < |z| < 1$ и для которых существует постоянная $c > 0$ такая, что для любых $\sigma \in [\rho, 1]$ выполняется неравенство

$$\int_{-\pi}^{\pi} |F(\sigma e^{i\varphi})|^2 \, d\varphi < c.$$

Оператор L, определенный равенством $L\varphi_n = \sum_n \varphi_n t^n = \Phi(t)$, $|t| = 1$, как известно, устанавливает изоморфизм между пространствами $\{\rho, 1\}$ и

$\{\{\rho, 1\}\}$. Изображения обозначим через $\Phi(t)$, $G(t)$ и т. д. Дополнительно предположив, что $A_{ij}(t) \neq 0$, $i, j = 1, 2$, применим к системе (1) оператор L. Тогда она примет вид

$$\begin{gathered}\Phi(t) - A(t)\Psi(tR) = G(t), \quad |t| = 1, \\ \Phi(r\tau) - B^{-1}(\tau)\Psi(\tau) = -H(\tau), \quad |\tau| = 1.\end{gathered} \tag{2}$$

Здесь $A(t) = A_{22}(t)A_{11}^{-1}(t)$, $B(\tau) = A_{12}(\tau)A_{21}^{-1}(\tau)$ — отличные от нуля известные функции из пространства W; известны также функции $G(t) = A_{22}(t)A_{11}^{-1}(t)G_1(t)$, $H(t) = G_2(t)$, принадлежащие $L_2(|t| = 1)$; искомые функции $\Phi(t) \in \{\{r, 1\}\}$, $\Psi(t) \in \{\{R, 1\}\}$; W — винеровское пространство функций $A(t)$, коэффициенты Лорана $\{a_n\}$ которых удовлетворяют условию $\{a_n\} \in l_1$.

Систему (2) будем рассматривать как задачу Римана со сдвигом для областей

$$D^+ = \{z \mid r < |z| < 1\}, \quad D^- = \{z \mid R < |z| < 1\}.$$

Системы (2) и (1) эквивалентны, их решения связаны равенствами

$$u_n = L^{-1}(\Psi(t)A_{12}^{-1}(t)), \quad v_n = L^{-1}(\Phi(t)A_{22}^{-1}(t)), \quad n = 0, \pm 1, \ldots$$

1. Решение задачи о скачке. Определить функции $X(t) \in \{\{r, 1\}\}$ и $Y(t) \in \{\{R, 1\}\}$ по краевому условию

$$X(t) - \lambda Y(Rt) = S(t), \quad X(r\tau) - Y(\tau) = -M(\tau), \quad |t| = 1, \quad |\tau| = 1, \tag{3}$$

где λ — заданное комплексное число; $S(t)$, $M(t)$ — известные функции из пространства $L_2(|t| = 1)$. Применив к выражениям (3) оператор L^{-1}, получим

$$x_n - \lambda R^n y_n = s_n, \quad -r^n x_n + y_n = m_n, \quad n = 0, \pm 1, \ldots$$

а. Если для любого целого n $\lambda \neq (Rr)^{-n}$, решение задачи (3) имеет вид

$$\begin{gathered}X(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\Omega_\lambda\left(\frac{t}{\tau}\right)\frac{S(\tau)}{\tau}d\tau + \frac{\lambda}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\Omega_\lambda\left(\frac{Rt}{\tau}\right)\frac{M(\tau)}{\tau}d\tau, \\ Y(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\Omega_\lambda\left(\frac{t}{\tau}\right)\frac{M(\tau)}{\tau}d\tau + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\Omega_\lambda\left(\frac{rt}{\tau}\right)\frac{S(\tau)}{\tau}d\tau, \quad |t| = 1.\end{gathered} \tag{4}$$

Здесь $\Omega_\lambda(z) = \sum\limits_n \frac{z^n}{1 - \lambda(Rr)^n}$ — есть аналитическая в кольце $D = \{z \mid Rr < |z| < 1\}$ функция, предельное значение которой есть обобщенная функция. Интегралы в выражениях (4) понимаются как

$$\lim_{D \ni z \to t}\int\limits_{|\tau|=1}\Omega_\lambda\left(\frac{z}{\tau}\right)\frac{S(\tau)}{\tau}d\tau = \int\limits_{|\tau|=1}\Omega_\lambda\left(\frac{t}{\tau}\right)\frac{S(\tau)}{\tau}d\tau.$$

б. Если существует единственное целое ν такое, что $\lambda = (Rr)^{-\nu}$, то необходимое и достаточное условие разрешимости задачи (3) есть

$$\int\limits_{|\tau|=1}\{M(\tau) + r^\nu S(\tau)\}\frac{d\tau}{\tau^{\nu+1}} = 0. \tag{5}$$

При условии (5) решение задачи (3) существует и зависит от одной произвольной комплексной постоянной:

$$\begin{gathered}X(t) = ct^\nu + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\Omega_\lambda\left(\frac{t}{\tau}\right)\frac{S(\tau)}{\tau}d\tau + \frac{\lambda}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\Omega_\lambda\left(\frac{Rt}{\tau}\right)\frac{M(\tau)}{\tau}d\tau, \\ Y(t) = \frac{c}{\lambda R^\nu}t^\nu + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\Omega_\lambda\left(\frac{t}{\tau}\right)\frac{M(\tau)}{\tau}d\tau + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\Omega_\lambda\left(\frac{rt}{\tau}\right)\frac{S(\tau)}{\tau}d\tau, \\ |t| = 1,\end{gathered} \tag{6}$$

где $\Omega_\lambda(z) = \sum\limits_n{}' \frac{z^n}{1 - \lambda(Rr)^n}$; штрих обозначает, что при $n = \nu$ нет члена.

Отметим, что задачу (3) можно решать в пространстве W и формулы (4), (6) остаются при этом в силе.

2. Факторизация при нулевом индексе. Напомним, что $A(t) \neq 0$, $B(\tau) \neq 0$, $A(t) \in W$, $B(\tau) \in W$. Пусть $\operatorname{ind} A(t) = \frac{1}{2\pi}[\arg A(t)]_{|t|=1} = 0$, $\operatorname{ind} B(\tau) = 0$, $|\tau| = 1$. Факторизацию строим в виде

$$A(t) = \lambda_0 X(t) Y^{-1}(Rt), \quad B^{-1}(\tau) = X(r\tau) Y^{-1}(\tau), \quad |t| = 1, \quad |\tau| = 1.$$

Здесь $X(z)$, $Y(z)$ — не имеющие нулей искомые аналитические внутри и непрерывные в замкнутых областях соответственно D^+ и D^- функции, предельные значения которых принадлежат W и также не обращаются в нуль; λ_0 — искомое комплексное число.

Перейдем к логарифмам

$$\ln X(t) - \ln Y(Rt) = \ln \frac{A(t)}{\lambda_0}, \quad \ln X(r\tau) - \ln Y(\tau) = -\ln B(\tau),$$
$$|t| = |\tau| = 1. \tag{7}$$

Известно [2], что при сделанных выше предположениях $\ln A(t) \in W$, $\ln B(\tau) \in W$. Следовательно, уравнения (7) есть задача о скачке в пространстве W. Искомые функции $X(t)$, $Y(t)$ определяются по формуле (6), а искомое число λ_0 — из условия разрешимости задачи (7).

3. Факторизация при любом индексе. Пусть $\operatorname{ind} A(t) = \varkappa_1$, $\operatorname{ind} B(\tau) = \varkappa_2$, $\varkappa = \varkappa_1 + \varkappa_2$, $|t| = 1$, $|\tau| = 1$. Числа $z_0 \in D^+$, $z_1 \in \{z, 0 < |z| < R\}$. Тогда $\operatorname{ind} \frac{(t - z_0)^{\varkappa}}{(Rt - z_1)^{\varkappa_2}} = \varkappa_1$, $\operatorname{ind} \frac{(r\tau - z_0)^{\varkappa}}{(\tau - z_1)^{\varkappa_2}} = \varkappa_2$. Функции $A_0(t) = A(t) \times \frac{(t - z_0)^{-\varkappa}}{(Rt - z_1)^{-\varkappa_2}}$, $B_0^{-1}(\tau) = B^{-1}(\tau) \frac{(r\tau - z_0)^{-\varkappa}}{(\tau - z_1)^{-\varkappa_2}}$ удовлетворяют условиям п. 2. Следовательно, справедлива факторизация

$$A(t) = \lambda_0 \frac{(t - z_0)^{\varkappa}}{(Rt - z_1)^{\varkappa_2}} \frac{X(t)}{Y(Rt)}, \quad B^{-1}(\tau) = \frac{(r\tau - z_0)^{\varkappa}}{(\tau - z_1)^{\varkappa_2}} \frac{X(r\tau)}{Y(\tau)}. \tag{8}$$

4. Решение задачи (2). *С помощью факторизации (8) приводим краевое условие (2) к виду (3).* Рассмотрим отдельные случаи.

1. $\varkappa \geqslant 0$. Если для любого целого n $\lambda_0 \neq (Rr)^{-n}$, то существует безусловное решение задачи (2), зависящее от $\varkappa$ произвольных комплексных постоянных и определяемое формулой (4). Однородная задача имеет $\varkappa$ линейно независимых решений. Если существует ν такое, что $\lambda_0 = (Rr)^{-\nu}$, то для разрешимости задачи (2) необходимо и достаточно выполнение условия

$$\int_{|\tau|=1} \left\{ \frac{H(\tau)}{(r\tau - z_0)^{\varkappa} X(r\tau)} + r^{\nu} \frac{G(\tau)}{(\tau - z_0)^{\varkappa} X(\tau)} \right\} \frac{d\tau}{\tau^{\nu+1}} =$$
$$= \int_{|\tau|=1} \left\{ -\frac{P_{\varkappa-1}(r\tau)}{(r\tau - z_0)^{\varkappa}} + r^{\nu} \frac{P_{\varkappa-1}(\tau)}{(\tau - z_0)^{\varkappa}} \right\} \frac{d\tau}{\tau^{\nu+1}}. \tag{9}$$

Равенство (9) определяет один из коэффициентов многочлена $P_{\varkappa-1}(t)$. Следовательно, если выполняется условие (9), то задача (2) имеет решение, зависящее от $\varkappa$ произвольных комплексных постоянных и определяемое формулой (6), причем однородная задача имеет $\varkappa$ линейно независимых решений.

2. $\varkappa < 0$. В первом подслучае, когда $\lambda_0 \neq (Rr)^{-n}$ для любого целого n, задача (2) имеет единственное решение, определяемое формулой (4), если выполняются $|\varkappa|$ необходимых и достаточных условий аналитичности

функции $\Phi(z)$ в точке $z = z_0$:

$$\int\limits_{|\tau|=1} \Omega_{\lambda_0}^{(k)}\left(\frac{z_0}{\tau}\right) \frac{G(\tau)}{(\tau - z_0)^{\varkappa} X(\tau)} \frac{d\tau}{\tau^{k+1}} +$$

$$+ \lambda_0 \int\limits_{|\tau|=1} \Omega_{\lambda_0}^{(k)}\left(\frac{Rz_0}{\tau}\right) \frac{H(\tau) R^k}{(r\tau - z_0)^{\varkappa} X(r\tau)} \frac{d\tau}{\tau^{k+1}} = 0, \quad k = 0, \ldots, |\varkappa| - 1.$$

Второй подслучай: существует целое ν такое, что $\lambda_0 = (Rr)^{-\nu}$. Для разрешимости задачи (2) необходимо и достаточно выполнение условия

$$\int\limits_{|\tau|=1} \left\{\frac{H(\tau)}{(r\tau - z_0)^{\varkappa} X(r\tau)} + r^{\nu} \frac{G(\tau)}{(\tau - z_0)^{\varkappa} X(\tau)}\right\} \frac{d\tau}{\tau^{\nu+1}} = 0$$

и $|\varkappa|$ условий аналитичности

$$c\left(\frac{d^k}{dt^k} t^{\nu}\right)_{t=z_0} + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\tau|=1} \Omega_{\lambda_0}^{(k)}\left(\frac{z_0}{\tau}\right) \frac{G(\tau)}{(\tau - z_0)^{\varkappa} X(\tau)} \frac{d\tau}{\tau^{k+1}} +$$

$$+ \frac{\lambda_0}{2\pi i} \int\limits_{|\tau|=1} \Omega_{\lambda_0}^{(k)}\left(\frac{Rz_0}{\tau}\right) \frac{H(\tau) R^k}{(r\tau - z_0)^{\varkappa} X(r\tau)} \frac{d\tau}{\tau^{k+1}} = 0, \quad k = 0, \ldots, |\varkappa| - 1.$$

Если эти условия выполняются, задача (2) имеет единственное решение, определяемое формулой (6).

1. *Гахов Ф. Д., Черский Ю. И.* Уравнения типа свертки.— М. : Наука, 1978.— 295 с.
2. *Крейн М. Г.* Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов.— Успехи мат. наук, 1958, 13, № 5, с. 3—120.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР,
Львов

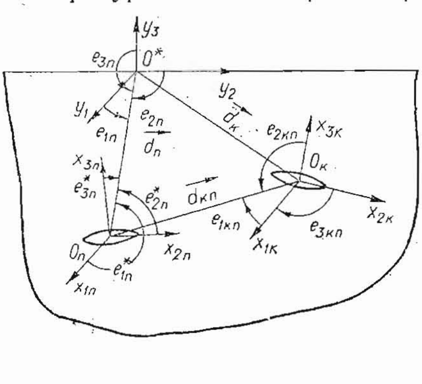
Получено 14.04.82

УДК 536.12

Г. С. Кит, М. В. Хай, И. П. Лаушник

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ПЛОСКИМИ ТРЕЩИНАМИ

Пусть полупространство, ослабленное N плоскими произвольно размещенными трещинами, находится под действием температуры и тепловых потоков, заданных на его границе и поверхностях трещин. Определим стационарное температурное поле в рассматриваемом полупространстве с трещинами.



Обозначим через $T(y_1, y_2, y_3)$ функцию, описывающую распределение температуры, где y_1, y_2, y_3 — декартовые координаты произвольной точки в системе координат $0^* y_1 y_2 y_3$, выбранной так, что плоскость $y_1 0^* y_2$ совпадает с границей полупространства, которому соответствуют значения $y_3 \leqslant 0$. Выберем также дополнительно локальные декартовые системы координат $0_n\, x_{1n} x_{2n} x_{3n}$ с началом 0_n в занятой трещиной области S_n так, что плоскость $x_{1n} 0_n x_{2n}$ совпадает с областью трещины S_n, причем противоположные поверхности трещин $S_n^{\pm}$ соответствуют значениям $x_{3n} = \pm 0$.

Расположение трещин в полупространстве определяется заданием величин d_n и направляющих косинусов e_{jn} $(j = 1, 2, 3)$ вектора, соединя