согласно неравенству (12), то область значений дроби (1) принадлежит кругу

$$|z - b_0| \leqslant \sum_{k_1=1}^{N} |a_{k_1}|,$$

что и требовалось доказать.

Интересна взаимосвязь полученных признаков сходимости. Согласно исследованиям работы [1], ВЦД (1) можно формально представить как решение $X_1$ бесконечной системы линейных алгебраических уравнений с правой частью

$$(b_0, a_1, a_2, \ldots, a_N, 0, 0, \ldots, 0 \ldots)^T$$

и матрицей $A$ вида

$$\left\| \begin{array}{ccccccccccc} b_1 & 0 & \ldots & 0 & a_{11} & \ldots & a_{1N} & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ 0 & b_2 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{21} & \ldots & a_{2N} & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & b_N & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ -1 & 0 & \ldots & 0 & b_{11} & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & b_{1N} & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ 0 & -1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & b_{21} & \ldots & 0 & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & -1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & b_{2N} & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right\| .$$

Тогда условие сходимости (4) для матрицы бесконечной системы дает диагональное преобладание по столбцам, а условие (10) — по строкам.

1. *Крупка З. И., Шмойлов В. И.* О параллельном вычислении алгоритмов, представленных ветвящимися цепными дробями.— Многопроцессор. вычисл. структуры, 1980, № 2/11, с. 78—80.
2. *Марков А. А.* Избранные труды по теории непрерывных дробей и функций, наименее отклоняющихся от нуля.— М.; Л. : Гостехиздат, 1948.— 411 с.
3. *Слешинский И. В.* К вопросу о сходимости непрерывных дробей.—Мат. сб., 1888, **14**, с. 337—343.
4. *Thron W. J.* Some results and problems in the analitic theory of continued fractions.— Math. Stud., 1964, **32**, N 1/2, p. 61—73.
5. *Wall H. S.* Analitic theory of continued fractions.— New York : D. Yan Nostrand co., 1948.— 433 p.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР,
Львов

Получено 15.04.81

УДК 512.8

Б. З. Шаваровский

## ПОЛУСКАЛЯРНАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ МАТРИЦ С ПОПАРНО РАЗЛИЧНЫМИ КОРНЯМИ ИХ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО МНОГОЧЛЕНА

Пусть $A(x)$ — регулярная $n \times n$-матрица степени $m$ с элементами из кольца $\mathbb{C}[x]$. Предположим, что характеристический многочлен $\Delta(x) = \det A(x)$ не имеет кратных корней. В настоящей работе найдена полная система инвариантов матрицы $A(x)$ относительно полускалярно эквивалентных преобразований [1].

**Предложение 1.** Существуют такие корни $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ характеристического многочлена $\Delta(x)$, что матрица $A(x)$ полускалярно эквивалентна [1] матрице вида

$$QA(x)R(x) = \left\| \begin{array}{cc} E_{n-1} & 0 \\ \bar{b}(x) & \Delta(x) \end{array} \right\| = F(x), \tag{1}$$

где $E_{n-1}$ — единичная матрица порядка $n-1$; $\bar{b}(x) = \| b_1(x), \ldots, b_{n-1}(x) \|$; $b_p(\alpha_0) = 0$, $b_p(\alpha_q) = \delta_{pq}$, $p, q = 1, \ldots, n-1$; $\delta_{pq}$ — символ Кронекера.

Доказательство. Согласно теореме 1 [1], матрица $A(x)$ полускалярно эквивалентна матрице вида

$$Q_1 A(x) R_1(x) = \begin{Vmatrix} E_{n-1} & 0 \\ \bar{a}(x) & \Delta(x) \end{Vmatrix}. \tag{2}$$

Здесь $\deg \bar{a}(x) < \deg \Delta(x) = mn$.

Произвольно фиксируем корень $\alpha_0$ характеристического многочлена $\Delta(x)$. Прибавлением первых $n-1$ строк матрицы (2), умноженных на некоторые константы, к последней ее строке можно получить матрицу вида (2), последняя строка которой обращается в нулевую при подстановке $x = \alpha_0$. Пусть таким образом получена матрица

$$A_0(x) = \begin{Vmatrix} E_{n-1} & 0 \\ \bar{a}_0(x) & \Delta(x) \end{Vmatrix},$$

где $\bar{a}_0(x) = \| a_{10}(x), \ldots, a_{n-1,0}(x) \|$; $\bar{a}_0(\alpha_0) = \bar{0}$. Поскольку степень элемента $a_{10}(x)$ удовлетворяет условию $m \leqslant \deg a_{10}(x) < mn$ [2], то существует такой корень $\alpha_1$ характеристического многочлена $\Delta(x)$, что $a_{10}(\alpha_1) \neq 0$. Без ограничения общности можно считать $a_{10}(\alpha_1) = 1$. Прибавляем некоторые кратные первого столбца матрицы $A_0(x)$ ко всем последующим ее столбцам (кроме последнего) и, совершив соответствующие операции с первыми $n-1$ ее строками, получим матрицу

$$A_1(x) = \begin{Vmatrix} E_{n-1} & 0 \\ \bar{a}_1(x) & \Delta(x) \end{Vmatrix}.$$

Здесь

$$\bar{a}_1(x) = \| a_{11}(x), \ldots, a_{n-1,1}(x) \|; \quad \bar{a}_1(\alpha_0) = \bar{0};$$
$$a_{11}(\alpha_1) = 1; \quad a_{21}(\alpha_1) = \cdots = a_{n-1,1}(\alpha_1) = 0.$$

Ввиду того, что $m \leqslant \deg a_{21}(x) < mn$ [2], существует корень $\alpha_2$ характеристического многочлена $\Delta(x)$ такой, что $a_{21}(\alpha_2) \neq 0$. Не умаляя общности, считаем $a_{21}(\alpha_2) = 1$. Прибавляем теперь некоторые кратные второго столбца матрицы $A_1(x)$ ко всем остальным ее столбцам (кроме последнего), совершаем соответствующие операции над ее $n-1$ первыми строками, чтобы не нарушить вид (2), и получаем матрицу

$$A_2(x) = \begin{Vmatrix} E_{n-1} & 0 \\ \bar{a}_2(x) & \Delta(x) \end{Vmatrix},$$

где $\bar{a}_2(x) = \| a_{12}(x), \ldots, a_{n-1,2}(x) \|$; $\bar{a}_2(\alpha_0) = \bar{0}$; $a_{12}(\alpha_1) = 1$, $a_{22}(\alpha_1) = \cdots$ $\cdots = a_{n-2,2}(\alpha_1) = 0$, $a_{22}(\alpha_2) = 1$, $a_{12}(\alpha_2) = a_{32}(\alpha_2) = \cdots = a_{n-1,2}(\alpha_2) = 0$.

Продолжая этот процесс и далее, не более как через $n-1$ таких шагов получаем матрицу (1). А так как все совершенные над матрицей вида (2) операции являются скалярно эквивалентными преобразованиями, то предложение доказано.

**Определение 1.** Будем говорить, что матрица (1) ориентированная по корням $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ характеристического многочлена $\Delta(x)$.

**Определение 2.** Числовые матрицы $\| a_{ij} \|_{kl}$, $\| b_{ij} \|_{kl}$ будем называть диагонально эквивалентными, если существуют неособенные числовые матрицы $\operatorname{diag}(\beta_1, \ldots, \beta_l)$ и $\operatorname{diag}(\gamma_1, \ldots \gamma_k)$ такие, что

$$\| a_{ij} \|_{kl} \operatorname{diag}(\beta_1, \ldots, \beta_l) = \operatorname{diag}(\gamma_1, \ldots, \gamma_k) \| b_{ij} \|_{kl}. \tag{3}$$

**Предложение 2.** Для диагональной эквивалентности матриц $\| a_{ij} \|_{kl}$ и $\| b_{ij} \|_{kl}$ необходимо и достаточно выполнение следующих условий: 1) если $a_{ij} = 0$, то $b_{ij} = 0$, и наоборот ($i = 1, \ldots, k$; $j = 1, \ldots, l$); 2) для произвольных ненулевых элементов $a_{i_1 j_1}, \ldots, a_{i_t j_t}$; $a_{i_1 h_1}, \ldots, a_{i_t h_t}$ и $b_{i_1 j_1}, \ldots, b_{i_t j_t}$; $b_{i_1 h_1}, \ldots, b_{i_t h_t}$ матриц $\| a_{ij} \|_{kl}$ и $\| b_{ij} \|_{kl}$ таких, что $(h_1, \ldots, h_t)$ — произвольная перестановка индексов $j_1, \dots, j_t$ $(1 \leqslant i_1 < \dots < i_t \leqslant k,\ 1 \leqslant j_1 < \dots < j_t \leqslant l)$, справедливо соотношение

$$\frac{a_{i_1 j_1} \dots a_{i_t j_t}}{a_{i_1 h_1} \dots a_{i_t h_t}} = \frac{b_{i_1 j_1} \dots b_{i_t j_t}}{b_{i_1 h_1} \dots b_{i_t h_t}}.$$

Доказательство. Необходимость. Условия 1) и 2) следуют сразу из равенства (3), так как все $\beta_1, \dots, \beta_l$; $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ не равны нулю.

Достаточность. Рассмотрим матричное уравнение вида

$$\| a_{ij} \|_{kl} \operatorname{diag}(x_1, \dots, x_l) = \operatorname{diag}(y_1, \dots, y_k) \| b_{ij} \|_{kl}$$

($\operatorname{diag}(x_1, \dots, x_l)$ $\operatorname{diag}(y_1, \dots, y_k)$ — неизвестные матрицы). Последнее равносильно, очевидно, такому уравнению:

$$\left\| \begin{array}{cccccccc} a_{11} & 0 & \dots & 0 & -b_{11} & & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & & \\ & & & & & & \cdot & \\ a_{k1} & 0 & \dots & 0 & 0 & & & -b_{k1} \\ 0 & a_{12} & \dots & 0 & -b_{12} & & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & & \\ & & & & & & \cdot & \\ 0 & a_{k2} & \dots & 0 & 0 & & & -b_{k2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & a_{1l} & -b_{1l} & & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & & \\ & & & & & & \cdot & \\ 0 & 0 & \dots & a_{kl} & 0 & & & -b_{kl} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_l \\ y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right\|. \qquad (4)$$

Покажем, что при выполнении условий 1) и 2) существует решение уравнения (4), каждая компонента которого отлична от нуля. Действительно, если число ненулевых строк матрицы этого уравнения меньше числа неизвестных, которые «падают» при умножении на ненулевые столбцы, то все очевидно в силу условия 1). Если это не так, т. е. число ненулевых строк не меньше числа неизвестных, «падающих» при умножении на ненулевые столбцы, то легко убедиться, что при выполнении условий 1) и 2) каждая подматрица из $d$ строк матрицы уравнения (4), содержащая ровно $d$ ненулевых столбцов, имеет ранг $d - 1$ $(4 \leqslant d \leqslant k + l)$. Это ввиду строения уравнения (4) значит, что существует его решение, каждая компонента которого отлична от нуля. Этим все доказано.

Пусть матрица $A(x)$ полускалярно эквивалентными преобразованиями приведена к матрице $F(x)$ вида (1), а матрица $B(x)$ — к матрице

$$G(x) = \left\| \begin{array}{cc} E_{n-1} & 0 \\ \bar{c}(x) & \Delta(x) \end{array} \right\|,$$

ориентированной по тем же корням $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ многочлена $\Delta(x)$, что и матрица $F(x)$. Рассмотрим матрицы-строки: $\| \bar{b}(x), b_n(x) \|$, $\| \bar{c}(x), c_n(x) \|$, где $\bar{b}(x)$ взято из матрицы $F(x)$ и $b_n(x) = b_1(x) + \dots + b_{n-1}(x) - 1$; $\bar{c}(x) = \| c_1(x), \dots, c_{n-1}(x) \|$ взято из матрицы $G(x)$ и $c_n(x) = c_1(x) + \dots + c_{n-1}(x) - 1$. Пусть $M_F = M_{\|\bar{b}(x), b_n(x)\|}[\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{mn-1}]$, $M_G = M_{\|\bar{c}(x), c_n(x)\|}[\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{mn-1}]$ — значения матриц $\| \bar{b}(x), b_n(x) \|$, $\| \bar{c}(x), c_n(x) \|$ на системе корней многочлена $\Delta(x)$ [2].

**Теорема 1.** Для полускалярной эквивалентности матриц $A(x)$ и $B(x)$ необходимо и достаточно, чтобы матрицы $M_F$ и $M_G$ были диагонально эквивалентными.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь. Из полускалярной эквивалентности матриц $A(x)$ и $B(x)$ следует полускалярная эквивалентность матриц $F(x)$ и $G(x)$. Поэтому для взаимных матриц $F_*(x)$ и $G_*(x)$ справедливо равенство

$$F_*(x)\|s_{uv}\| = \|r_{uv}(x)\| G_*(x), \tag{5}$$

где $\|s_{uv}\|$, $\|r_{uv}(x)\|$ — обратимые матрицы порядка $n$ соответственно над $\mathbb{C}$ и $\mathbb{C}[x]$. Из равенства (5) легко видеть, что $\Delta(x) \mid r_{1n}(x), \ldots, r_{n-1,n}(x)$ и в силу неособенности матрицы $\|r_{uv}(x)\|$ имеем $(\Delta(x), r_{nn}(x)) = 1$. Учитывая это, переходим в равенстве (5) к значениям матриц на системе корней $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{mn-1}$ многочлена $\Delta(x)$ и после отбрасывания нулевых строк получаем

$$\left\|\begin{matrix} 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -1 & \ldots & 0 & 1 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ldots & -1 & 1 \\ -b_1(\alpha_n) & \ldots & -b_{n-1}(\alpha_n) & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -b_1(\alpha_{mn-1}) & \ldots & -b_{n-1}(\alpha_{mn-1}) & 1 \end{matrix}\right\| \|s_{uv}\| =$$

$$= \operatorname{diag}(r_{nn}(\alpha_0), \ldots, r_{nn}(\alpha_{mn-1})) \left\|\begin{matrix} 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -1 & \ldots & 0 & 1 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ldots & -1 & 1 \\ -c_1(\alpha_n) & \ldots & -c_{n-1}(\alpha_n) & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -c_1(\alpha_{mn-1}) & \ldots & -c_{n-1}(\alpha_{mn-1}) & 1 \end{matrix}\right\| \tag{6}$$

или

$$M_F \|s'_{uv}\| = \operatorname{diag}(r_{nn}(\alpha_0), \ldots, r_{nn}(\alpha_{mn-1})) M_G, \tag{6'}$$

где

$$\|s'_{uv}\| = \left\|\begin{matrix} 1 & & 0 & -1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & -1 \\ 0 & & & 1 \end{matrix}\right\| \|s_{uv}\| \left\|\begin{matrix} 1 & & 0 & 1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & 1 \\ 0 & & & 1 \end{matrix}\right\|.$$

Легко убедиться, что матрица $\|s'_{uv}\|$ в соотношении (6′) неособенная диагональная.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть выполняются условия теоремы, т. е. справедливо равенство (6′), в котором матрицы $\|s'_{uv}\|$ и $\operatorname{diag}(r_{nn}(\alpha_0), \ldots, r_{nn}(\alpha_{mn-1}))$ неособенные диагональные. Перейдем от равенства (6′) к равенству (6), где

$$\|s_{uv}\| = \left\|\begin{matrix} 1 & & 0 & 1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & 1 \\ 0 & & & 1 \end{matrix}\right\| \|s'_{uv}\| \left\|\begin{matrix} 1 & & 0 & -1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & -1 \\ 0 & & & 1 \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} s'_{11} & & 0 & s'_{nn} - s'_{11} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & s'_{n-1,n-1} & s'_{nn} - s'_{n-1,n-1} \\ 0 & & & s'_{nn} \end{matrix}\right\|.$$

Введем обозначения:

$$r_{pp}(x) = s_{pp} + s_{pn}c_p(x), \quad r_{pq}(x) = s_{pn}c_q(x), \quad r_{pn}(x) = s_{pn}\Delta(x),$$

$$r_{nn}(x) = s_{nn} - \sum_{p=1}^{n-1} s_{pn}b_p(x), \quad r_{np}(x) = (r_{nn}(x)\,c_p(x) - s_{pp}b_p(x))\,\Delta^{-1}(x),$$

$$p,\ q = 1, \ldots, n-1.$$

В этих обозначениях, как видно из равенства (6), все выражения $r_{np}(x)$ — многочлены. Очевидной проверкой убеждаемся в справедливости следующего равенства:

$$\begin{Vmatrix} \Delta(x)\, E_{n-1} & 0 \\ -\bar{b}(x) & 1 \end{Vmatrix} \| s_{uv} \| = \| r_{uv}(x) \| \begin{Vmatrix} \Delta(x)\, E_{n-1} & 0 \\ -\bar{c}(x) & 1 \end{Vmatrix},$$

где матрицы $\| s_{uv} \|$, $\| r_{uv}(x) \|$ обратимые. Перейдя в последнем равенстве к взаимным матрицам, получаем, что матрицы $F(x)$ и $G(x)$, следовательно, матрицы $A(x)$ и $B(x)$ полускалярно эквивалентные.

Из теоремы 1 и предложения 2 вытекает следующая теорема.

**Теорема 2.** Для полускалярной эквивалентности матриц $A(x)$ и $B(x)$ необходимо и достаточно выполнение условий 1) и 2) предложения 2 для матриц $M_F$ и $M_G$.

На основании работы [1] справедлива такая теорема.

**Теорема 3.** Если матрицы $A(x)$ и $B(x)$ унитальны, то для их подобия необходимо и достаточно выполнение условия теоремы 1.


1. *Казімірський П. С., Петричкович В. М.* Про еквівалентність поліноміальних матриць.— В кн.: Теоретичні та прикладні питання алгебри і диференціальних рівнянь. К. : Наук. думка, 1977, с. 61—66.
2. *Казімірський П. С.* Квазіунітальні та супровідні матриці матричних многочленів.— Там же, с. 29—52.



Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР,
Львов



Получено 06.01.82



УДК 517.348



В. А. Козицкий


## БЕСКОНЕЧНАЯ АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ СИСТЕМА С БЛОЧНО-ТЕПЛИЦЕВОЙ МАТРИЦЕЙ И ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМИ МНОЖИТЕЛЯМИ

В задачах теории дифракции играют роль бесконечные алгебраические системы типа свертки с переменными коэффициентами. Рассмотрим одну из них (всюду суммирование от $-\infty$ до $+\infty$)

$$\begin{gathered} \sum_k a_{n-k}^{11} v_k - R^n \sum_k a_{n-k}^{12} u_k = g_n^1, \\ \sum_k a_{n-k}^{21} u_k - r^n \sum_k a_{n-k}^{22} v_k = g_n^2, \quad n = 0, \pm 1, \ldots \end{gathered} \tag{1}$$

При традиционных предположениях $\{g_n^i\} \in l_2$, $\{a_n^{ij}\} \in l_1$, $i, j = 1, 2$ составляющие $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ решения ищутся в $l_2$. Примем также, что $R$ и $r$ действительные и $1 > R \geqslant r > 0$. Пусть решение системы (1) существует. С целью приведения ее к задаче теории аналитических функций сделаем замену

$$\psi_n = \sum_k a_{n-k}^{12} u_k, \quad \varphi_n = \sum_k a_{n-k}^{22} v_k.$$

Пространство последовательностей $\{f_n\}$ таких, что $\{f_n\} \in l_2$ и $\{\rho^n f_n\} \in l_2$, обозначим через $\{\rho, 1\}$ (сравни с работой [1]). Легко видеть, что $\{\psi_n\} \in \in \{R, 1\}$ и $\{\varphi_n\} \in \{r, 1\}$. Введем еще пространство $\{\{\rho, 1\}\}$ функций $F(z)$, аналитических в кольце $\rho < |z| < 1$ и для которых существует постоянная $c > 0$ такая, что для любых $\sigma \in [\rho, 1]$ выполняется неравенство

$$\int_{-\pi}^{\pi} | F(\sigma e^{i\varphi}) |^2 \, d\varphi < c.$$

Оператор $L$, определенный равенством $L\varphi_n = \sum_n \varphi_n t^n = \Phi(t)$, $|t| = 1$, как известно, устанавливает изоморфизм между пространствами $\{\rho, 1\}$ и