УДК 517.968.23

Ю. И. Черский, Л. В. Гладун

РАЗРЕШИМОЕ В КВАДРАТУРАХ СИНГУЛЯРНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ СО СДВИГОМ И РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

На замкнутом контуре Ляпунова без самопересечений рассмотрим уравнение

$$KU \equiv [a(t) + b(t)]\, U(t) + \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\Gamma} \left[\frac{a(t)}{\tau - t} - \frac{\chi'(\tau)\, b(\tau)}{\chi(\tau) - \chi(t)} \right] U(\tau)\, d\tau = F(t), \quad t \in \Gamma. \tag{1}$$

При непрерывных функциях $a(t)$ и $b(t)$ решение этого уравнения построено в работе [5]. Предположим, что функции $a(t)$ и $b(t)$ не имеют нулей на Γ, $a(t)$ терпит разрывы первого рода в точках $t_1, \ldots, t_l$, а $b(t)$ — в точках $t_{l+1}, \ldots, t_m$, во всех остальных точках Γ они удовлетворяют условию Гельдера; $\chi(t)$ — функция сдвига такая, что $\chi'(t) \in H_\mu(\Gamma)$, $0 < \mu < 1$, $\chi'(t) \neq 0$ на Γ и значения функции $\chi(t)$ описывают замкнутый контур Ляпунова Λ без самопересечений. Считаем, что $\chi(t)$ — прямой сдвиг [2]. Функция $F(t)$ задана в пространстве $L_2(\Gamma, \rho)$ с нормой

$$\|F\| = \left(\int\limits_{\Gamma} |F(t)|^2 \rho(t)\, |dt| \right)^{1/2},$$

где

$$\rho(t) = \prod_{k=1}^{m} |t - t_k|^{\sigma_k}, \quad 0 \leqslant \sigma_k < 1, \quad \sigma_k = \mathrm{const}, \quad k = \overline{1, m}.$$

Решение уравнения $U(t)$ будем искать в пространстве $L_2(\Gamma, \rho)$. Предположим, что все точки $t_1, \ldots, t_m$ различны. Зафиксируем значение $\arg a(t_1 + 0) \in [0, 2\pi)$, по которому выберем $\arg a(t_1 - 0)$ так, чтобы

$$-2\pi < \arg a(t_1 + 0) - \arg a(t_1 - 0) \leqslant 0.$$

Функция $\ln a(t)$ на дуге $t_1 t_2$ кривой Γ определяется условием непрерывности и равенством $\ln a(t_1 + 0) = \ln|a(t_1 + 0)| + i \arg a(t_1 + 0)$. Двигаясь вдоль кривой Γ от точки t_1 к точке t_2 по выбранной ветви логарифма, получим некоторое фиксированное значение $\arg a(t_2 - 0)$ из равенства $\ln a(t_2 - 0) = \ln|a(t_2 - 0)| + i \arg a(t_2 - 0)$. Теперь выберем значение $\arg a(t_2 + 0)$ так, чтобы выполнялось неравенство $-2\pi < \arg a(t_2 + 0) - \arg a(t_2 - 0) \leqslant 0$. Поступая аналогично, определяем на Γ некоторую кусочно-непрерывную функцию $\ln a(t)$, которая имеет разрывы первого рода в точках $t_1, \ldots, t_l$. Получим также фиксированные значения $\arg a(t_k \pm 0)$, $k = \overline{1, l}$ и равенство $\ln a(t_1 - 0) = \ln|a(t_1 - 0)| + i \arg a(t_1 - 0) + 2\pi i \alpha$, $\alpha \in \mathbb{Z}$. Аналогично получаем фиксированные значения $\arg b(t_n \pm 0)$, $n = \overline{l+1, m}$ и некоторую кусочно-непрерывную функцию $\ln b(t)$ с разрывами первого рода в точках $t_{l+1}, \ldots, t_m$, причем

$$\ln b(t_{l+1} - 0) = \ln|b(t_{l+1} - 0)| + i \arg b(t_{l+1} - 0) + 2\pi i \beta, \quad \beta \in \mathbb{Z},$$

$$-2\pi < \arg b(t_n - 0) - \arg b(t_n + 0) \leqslant 0, \quad n = \overline{l+1, m}.$$

Числа σ_k определим в интервале $[0, 1)$ так, чтобы

$$-\pi(1 + \sigma_k) < \arg a(t_k + 0) - \arg a(t_k - 0) < \pi(1 - \sigma_k), \quad k = \overline{1, l},$$

$$-\pi(1 + \sigma_k) < \arg b(t_k - 0) - \arg b(t_k + 0) < \pi(1 - \sigma_k), \quad k = \overline{l+1, m}.$$

Приведем уравнение (1) к краевой задаче Римана. Для этого введем аналитические функции

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{U(\tau)}{\tau - z}\, d\tau, \quad z \in D^+, \tag{2}$$

$$\Phi^-(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Lambda} \frac{b(\tau)\, U(\tau)}{\lambda - \zeta}\, d\lambda, \quad \zeta \in \Delta^-, \quad \lambda = \chi(\tau), \quad \tau \in \Gamma.$$

Здесь D^+ — ограниченная область с границей Γ; Λ^- — внешняя область с границей Λ. Воспользовавшись формулами Сохоцкого — Племеля, получим задачу Римана со сдвигом

$$a(t)\,\Phi^+(t) = \Phi^-[\chi(t)] + \frac{1}{2}F(t), \quad t\in\Gamma,$$

$$\Phi^+(t)\in L_2(\Gamma, \rho), \quad \Phi^-(v)\in L_2(\Lambda, \rho_1), \tag{3}$$

где

$$\rho_1(v) = |v - v_1|^{\sigma_1} \ldots |v - v_m|^{\sigma_m}; \quad v_i = \chi(t_i).$$

Введем конформное отображение $\varphi : \Delta^- \to D^-$, где D^- — внешняя область с границей Γ. Согласно методу конформного склеивания [2] существует однолистная аналитическая функция $w^+(z)$, определенная в области D^+ и переводящая ее в область D_1^+ с границей L; кроме того, существует однолистная аналитическая функция $w^-(\zeta)$ с простым полюсом на бесконечности, определенная в D^-, отображающая ее в область D_1^- с границей L, при этом $w^+(t) \equiv w^-[\varphi[\chi(t)]]$, $t\in\Gamma$. В результате задача (3) сводится к следующей эквивалентной задаче Римана без сдвига:

$$\Phi_1^+(\lambda) = a_1(\lambda)\,\Phi_1^-(\lambda) + G(\lambda), \quad \lambda\in L. \tag{4}$$

Здесь

$$a_1(\lambda)\,a(t) \equiv 1; \quad 2G(\lambda)\,a(t) \equiv F(t); \quad \lambda = w^+(t);$$

$$\Phi_1^\pm \in L_2(L, \rho_2); \quad \rho_2(\lambda) = \prod_{i=1}^{m} |\lambda - \lambda_i|^{\sigma_i}; \quad \lambda_i = w^+(t_i).$$

Переходя к решению задачи (4), факторизуем коэффициент

$$a_1(\lambda) = X^+(\lambda)\,[X^-(\lambda)]^{-1}, \tag{5}$$

$$X^\pm(z) = \exp\Gamma^\pm(z), \quad \Gamma^\pm(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\ln a_1(\lambda)}{\lambda - z}\,d\lambda, \quad z\in D_1^\pm.$$

Соотношение (5) справедливо во всех точках кривой L, за исключением точек $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$. В окрестностях этих точек имеем следующие представления (см. работу [1]):

$$X^\pm(z) = (z - \lambda_k)^{\frac{\arg a_1(\lambda_k - 0) - \arg a_1(\lambda_k + 0)}{2\pi}}\,\Phi_k(z), \quad k = \overline{2,\ l},$$

$$X^\pm(z) = (z - \lambda_1)^{\frac{\arg a_1(\lambda_1 - 0) - \arg a_1(\lambda_1 + 0)}{2\pi} - \alpha}\,\Phi_1(z),$$

где $\Phi_i(z)$ — ограниченные функции в окрестности точки λ_i.

Условие (4) запишем в виде

$$(\lambda - \lambda_1)^{-\alpha}\frac{\Phi_1^+(\lambda)}{X^+(\lambda)} - \mathcal{P}^+\left[\frac{G(\lambda)}{X^+(\lambda)}(\lambda - \lambda_1)^{-\alpha}\right] = (\lambda - \lambda_1)^{-\alpha}\frac{\Phi_1^-}{X^-} + $$
$$+ \mathcal{P}^-\left[\frac{G}{X^+}(\lambda - \lambda_1)^{-\alpha}\right].$$

Выражение (6) — это равенство функций из $L_2(L, \rho_3)$, где

$$\rho_3(\lambda) = \prod_{k=1}^{m} |\lambda - \lambda_k|^{\sigma_k'}; \quad \sigma_k' = \sigma_k + \frac{\arg a_1(\lambda_k - 0) - \arg a_1(\lambda_k + 0)}{\pi};$$

$$k = \overline{1,\ l}; \quad \sigma_k' = \sigma_k; \quad k = \overline{l+1,\ m},$$

причем выполняются неравенства $-1 < \sigma_k' < 1$ за счет выбора чисел σ_k; $\mathcal{P}^+$, $\mathcal{P}^-$ — известные проекционные операторы, ограниченные в $L_2(L, \rho_3)$ [3]. Стандартными приемами теории краевых задач [1] устанавливаем, что функция

$$\frac{\Phi(z)}{X(z)}(z-\lambda_1)^{-\alpha}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{G(\lambda)(\lambda-\lambda_1)^{-\alpha}}{X^+(\lambda)(\lambda-z)}\,d\lambda$$

есть многочлен $P_{-\alpha-1}(z)$ степени $(-\alpha-1)$ с произвольными комплексными коэффициентами; $P_{-\alpha-1}\equiv 0$ при $\alpha\geqslant 0$. Приравняв обе части равенства (6) многочлену $P_{-\alpha-1}(z)$, получим

$$\Phi_1^{\pm}(\lambda)=\frac{X^{\pm}(\lambda)}{(\lambda-\lambda_1)^{-\alpha}}\left\{\mathcal{P}^{\pm}\left[\frac{G}{X}(\lambda-\lambda_1)^{-\alpha}\right]+P_{-\alpha-1}(\lambda)\right\}. \qquad (7)$$

Если $\alpha>0$, то для разрешимости задачи необходимы и достаточны условия

$$\int\limits_\Gamma \frac{F(t)}{X^+[w^+(t)]\,a(t)}\,d[w^+(t)]^k=0, \quad k=1,\ldots,\alpha. \qquad (8)$$

Отметим, что мы получим все те же решения независимо от выбора начальной точки λ_k, $k=\overline{1,n}$ наших рассуждений.

Поскольку $\Phi^+(t)=\Phi_1^+[w^+(t)]$, $\Phi^-[\chi(t)]=\Phi_1^-[w^+(t)]$, то, использовав правило замены переменной в интеграле, получим, что $\Phi^+(t)\in L_2\times$ $\times(\Gamma,\rho)$, $\Phi^-(v)\in L_2(\Lambda,\rho_1)$.

Итак, если задача (3) неразрешима, то и неразрешимо уравнение (1). Предположим, что задача (3) имеет решение. Тогда, считая функции Φ^+, Φ^- известными, получаем уравнения (2) для определения искомой функции $U(t)$. Перепишем эти уравнения в равносильной форме, но для граничных значений аналитических функций:

$$U(t)=\Phi^+(t)+\Psi^-(t), \quad t\in\Gamma, \qquad (9)$$

$$b(t)U(t)=\Psi^+[\chi(t)]-\Phi^-[\chi(t)], \quad t\in\Gamma. \qquad (10)$$

Здесь $\Psi^+(v)$, $\Psi^-(t)$ — новые неизвестные аналитические функции такие, что $\Psi^+(v)\in L_2(\Lambda,\rho_1)$, $\Psi^-(t)\in L_2(\Gamma,\rho)$. Из уравнений (9), (10) получим еще одну задачу Римана со сдвигом

$$\Psi^+[\chi(t)]=b(t)\Psi^-(t)+G_1(t), \quad t\in\Gamma. \qquad (11)$$

Свободный член G_1 — это известная функция вида

$$G_1(t)=\Phi^-[\chi(t)]+b(t)\Phi^+(t)=[a(t)+b(t)]\Phi^+(t)-\frac{1}{2}F(t).$$

Если найдем решение $\Psi^-(t)$ задачи (11), то формула (9) определит решение исходного уравнения.

Составляющие решения задачи (11) принадлежат следующим классам:

$$\Psi^+(v)\in L_2(\Lambda,\rho_1), \quad \Psi^-(t)\in L_2(\Gamma,\rho).$$

Теорема 1. Если $\alpha\leqslant 0$, $\beta\geqslant 0$, то уравнение (1) безусловно разрешимо и $\dim\operatorname{Ker}K=\beta-\alpha$.

Теорема 2. Если $\alpha>0$, $\beta\geqslant 0$, то $\dim\operatorname{Ker}K=\beta$. Выполнение условий (8) есть необходимое и достаточное условие существования уравнения (1).

Теорема 3. При $\alpha\geqslant 0$, $\beta\leqslant 0$ имеем $\dim\operatorname{Ker}K=0$ и для разрешимости уравнения (1) необходима и достаточна совокупность условий (9) и

$$\int\limits_\Gamma \frac{G_1(t)}{Y^+[\omega^-(t)]}\,d[\omega^-(t)]^n=0, \quad n=1,\ldots,|\beta|, \qquad (12)$$

где функции ω^-, Y^+ можно найти с помощью рассуждений, подобных тем, которые приведены для построения функций w^+, X^+.

Теорема 4. Если $\alpha<0$, $\beta>0$, то для разрешимости уравнения (1) необходимо и достаточно выполнение условий (12). Эти условия эквива-

лентны совместимости алгебраической системы, полученной из условий разрешимости задачи (3):
$\dim \operatorname{Ker} K = -\alpha - r$ (r — ранг матрицы указанной системы).

Нами построено решение уравнения (1) в предположении, что функции $a(t)$ и $b(t)$ терпят разрывы в различных точках кривой Г.

Рассмотрим теперь случаи, когда у этих функций есть общие точки разрыва.

Для простоты предположим, что точки t_m и t_1 совпадают. Тогда решение уравнения (1) ищем в пространстве $L_2(\Gamma, \rho)$, где $\rho(t) = |t - t_1|^{\sigma_1} \ldots \ldots |t - t_{m-1}|^{\sigma_{m-1}}$. Числа $\sigma_2, \ldots, \sigma_{m-1}$ выбираем, как и в предыдущем случае. Относительно σ_1 поступим следующим образом. Введем числа a_1 и a_2 так:

$$\pi a_1 = \arg a(t_1 + 0) - \arg a(t_1 - 0), \quad \pi a_2 = \arg b(t_1 - 0) - \arg b(t_1 + 0).$$

Если $a_i \in (-1, 0]$, $i = 1, 2$, то σ_1 выберем произвольно из интервала $[0, 1)$. Если $a_i \in (-2, -1]$, $i = 1, 2$, то σ_1 выберем так, чтобы было справедливо неравенство $\max\{|a_1|, |a_2|\} - 1 < \sigma_1 < 1$. Аналогично поступим в случае, когда несколько точек разрыва коэффициентов $a(t)$ и $b(t)$ совпадают.

Указанным выше методом можно строить решение уравнения (1) и в более узких заданных пространствах функций $L_2(\Gamma, \rho)$, когда числа σ_j выбираются из более широкого интервала $-1 < \sigma_j < 1$, $j = 1, 2, \ldots, m$. Если

$$\arg a(t_k + 0) - \arg a(t_k - 0) \neq \pi(\pm 1 - \sigma_k), \quad k = \overline{1, l},$$
$$\arg b(t_k - 0) - \arg b(t_k + 0) \neq \pi(\pm 1 - \sigma_k), \quad k = \overline{l+1, m},$$

то видоизменяя приведенные выше рассуждения, можно построить решение уравнения (1) в $L_2(\Gamma, \rho)$.

1. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи.— М. : Наука, 1977.— 640 с.
2. *Литвинчук Г. С.* Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом.— М. : Наука, 1977.— 448 с.
3. *Хведелидзе Б. В.* Метод интегралов типа Коши в разрывных граничных задачах теории голоморфных функций одной комплексной переменной.— М., 1975, с. 5—162. (Итоги науки и техники/ ВИНИТИ. Соврем. прибл. математики; Т. 7).
4. *Черский Ю. И.* Интегральные уравнения, сводящиеся к двум задачам Римана.— Докл. АН СССР, 1979, 248, № 4, с. 802—805.
5. *Черський Ю. Й.* Сингулярне інтегральне рівняння зі зсувом.— Доп. АН УРСР. Сер. А., 1980, № 12, с. 15—18.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР, Львов

Получено 14.04.82

УДК 517.524

Н. А. Недашковский

ДОСТАТОЧНЫЕ ПРИЗНАКИ СХОДИМОСТИ ВЕТВЯЩИХСЯ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ

Важное место в теории обычных цепных дробей занимает изучение сходимости. Получены эффективные достаточные и необходимые признаки сходимости дробей с действительными и комплексными членами [3—5].

Исследуем сходимость ветвящихся цепных дробей (ВЦД) вида

$$b_0 + \sum_{k_1=1}^{N} \cfrac{a_{k_1}}{b_{k_1} + \sum\limits_{k_2=1}^{N} \cfrac{a_{k_1k_2}}{b_{k_1k_2} + \ddots + \sum\limits_{k_m=1}^{N} \cfrac{a_{k_1k_2\ldots k_m}}{b_{k_1\ldots k_m} + \ddots}}}, \tag{1}$$