и краевыми условиями

$$\alpha_{i1}(-y'''(0)+q'(0)y(0)+q(0)y'(0))+\alpha_{i0}(-y''(0)+q(0)y(0))+$$
$$+\beta_{i1}(-y'''(1)+q'(1)y(1)+q(1)y'(1))+\beta_{i0}(-y''(1)+$$
$$+q(1)y(1))=0 \quad (i=1,\ 2),$$

является самосопряженным. Легко видеть, что он дискретный. Кроме того, в пространстве $D[A]$ оператор AP и функционалы $y(0)$, $y(1)$, $y'(0)$, $y'(1)$ ограничены. Поэтому, как показано в работе [1], система корневых векторов оператора T полна в $D[A]$. Так как $\|y\| \leqslant \|y\|_A$ и $D[A]$ плотно в $\mathfrak{H}$, то эта система будет полной и в $\mathfrak{H} = L_2[0,\ 1]$.

1. *Кесельман Г. М.* О слабом возмущении области определения самосопряженного оператора.— Вестн. Льв. политехн. ин-та, 1981, № 150, с. 45—46.
2. *Лянце В. Э.* О замкнутых операторах в гильбертовом пространстве. — Теория функций и функцион. анализ, 1972, вып. 16, с. 165—186.
3. *Підстригач Я. С.* Про один випадок ускладнення граничних умов в задачах гідропружності.— Доп. АН УРСР. Сер. А, 1975, № 3, с. 235—238.
4. *Рисс Ф., Секефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу.— М. : Мир, 1979.— 592 с.

Львовский политехнический институт

Получено 03.03.82

УДК 513.88

В. Э. Лянце, О. Г. Сторож

О РЕЗОЛЬВЕНТЕ ВОЗМУЩЕННОГО ОПЕРАТОРА

В настоящей статье под оператором понимается линейное отображение в гильбертовом пространстве и применяются следующие обозначения: $D(T)$, $R(T)$, $Z(T)$ — область определения, область значений и ядро оператора T; $\mathfrak{S}(H_1,\ H_2)$ — множество линейных, замкнутых, плотно определенных операторов $H_1 \to H_2$; $\mathcal{B}(H_1,\ H_2) = \{T \in \mathfrak{S}(H_1,\ H_2) : D(T) = H_1\}$; $\mathcal{B}_\infty(H_1,\ H_2)$ — множество компактных операторов из $\mathcal{B}(H_1,\ H_2)$; $\mathfrak{S}(H) = \mathfrak{S}(H,\ H)$; $\mathcal{B}(H) = \mathcal{B}(H,\ H)$; $\mathcal{B}_\infty(H) = \mathcal{B}_\infty(H,\ H)$; $D[T]$ — гильбертово пространство, совпадающее как множество $D(T)$ и снабженное скалярным произведением $(\cdot|\cdot)_T$ графика замкнутого оператора T; T^* — оператор, сопряженный к T; 1_H — единичный оператор в пространстве H.

Пусть H, $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$ — фиксированные комплексные гильбертовы пространства; L, $L_0 \in \mathfrak{S}(H)$, $L_0 \subset L$, $W_i \in \mathcal{B}(D[L],\ \mathfrak{H}_i)$, $i = 1,\ 2$, $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$, $W = W_1 \oplus W_2$, $M = L_0^*$, $M_0 = L^*$. Предположим, что $(\mathfrak{H},\ W)$ является краевой парой для $(L,\ L_0)$, т. е. что $R(W) = \mathfrak{H}$, $Z(W) = D(L_0)$. Известно [4], что существуют такие единственные $V_1 \in \mathcal{B}(D[M],\ \mathfrak{H}_2)$, $V_2 \in \mathcal{B}(D[M],\ \mathfrak{H}_1)$, что для всех $y \in D(L)$, $z \in D(M)$

$$(Ly\,|\,z) - (y\,|\,Mz) = (W_1y\,|\,V_2z)_{\mathfrak{H}_1} - (W_2y\,|\,V_1z)_{\mathfrak{H}_2}. \tag{1}$$

При этом, как легко видеть,

$$W_1MV_1^* = 0, \quad W_1MV_2^* = -1_{\mathfrak{H}_1}, \quad W_2MV_1^* = 1_{\mathfrak{H}_2}, \quad W_2MV_2^* = 0. \tag{2}$$

Далее, пусть $\Phi_i \in \mathcal{B}_\infty(H,\ \mathfrak{H}_i)$, $i = 1,\ 2$. Определим операторы S, L_1, $M_1 : H \to H$ следующим образом:

$$D(S) = \{y \in D(L) : W_1y = \Phi_1y\}, \tag{3}$$

$$Sy = Ly + \Phi_2^*W_2y, \quad y \in D(S). \tag{4}$$

Здесь L_1 — сужение L на $Z(W_1)$; M_1 — сужение M на $Z(V_1)$. Из результатов работы [4] следует, что $S \in \mathfrak{S}(H)$, а L_1 и M_1 являются взаимно сопряженными.

Мы рассматриваем S как возмущение оператора L_1, изменяющее не только закон L его действия, но и оператор краевых условий W_1, и строим резольвенту[1] S_λ оператора S в предположении, что $\rho(L_1) \neq \varnothing$ и что резольвента L_λ оператора L_1 известна. Отметим, что в случае, когда возмущенный и невозмущенный операторы имеют общую область определения или общее конечномерное сужение, резольвента возмущенного оператора исследовалась во многих работах (см., например, работы [2, 3]). Более детальная библиография имеется в работе [1].

Изложим основные результаты. Прежде всего, заметим, что $\lambda \in \rho(L_1)$ тогда и только тогда, когда $\bar{\lambda} \in \rho(M_1)$, и для таких λ $M_{\bar{\lambda}} = L_\lambda^* \in \mathcal{B}(H, D[M_1])$. А если так, то $V_2 M_{\bar{\lambda}} \in \mathcal{B}(H_1, \mathfrak{H}_1)$. Поэтому при всех $\lambda \in \rho(L_1)$ определен оператор

$$N_\lambda \overset{\text{def}}{=} (V_2 M_{\bar{\lambda}})^* \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}_1, H).$$

Непосредственные вычисления показывают, что

$$N_\lambda = [L_\lambda(1 + \lambda M) + M] V_2^*. \tag{5}$$

Рассмотрим некоторые свойства оператора N_λ.

Лемма 1. Для всех $\lambda \in \rho(L_1)$, $y \in Z(L - \lambda 1_H)$

$$W_1 N_\lambda = -1_{\mathfrak{H}_1}, \tag{6}$$

$$N_\lambda W_1 y = -y. \tag{7}$$

Доказательство. Так как $W_1 L_\lambda = 0$, то выражение (6) следует из уравнений (2), (5). Предположим, что $y \in Z(L - \lambda)$, $x \in H$. Учитывая, что $V_1 M_{\bar{\lambda}} x = 0$ и применяя равенство (1) при $z = M_{\bar{\lambda}} x$, получаем $(N_\lambda W_1 y \mid x) = (W_1 y \mid V_2 M_{\bar{\lambda}} x)_{\mathfrak{H}_1} = (Ly \mid M_{\bar{\lambda}} x) - (y \mid M M_{\bar{\lambda}} x) = (-y \mid x)$, откуда следует выражение (7).

Лемма 2. Для всех $\lambda \in \rho(L_1)$

$$R(N_\lambda) = Z(L - \lambda 1_H). \tag{8}$$

Доказательство. Включение $Z(L - \lambda 1_H) \subset R(N_\lambda)$ вытекает из выражения (7). С другой стороны ясно, что $(L - \lambda) N_\lambda = V_2^* + LMV_2^*$. Но из результатов п. 7 работы [3] следует, что правая часть последнего равенства равна нулю, следовательно, $R(N_\lambda) \subset Z(L - \lambda 1_H)$.

Рассмотрим операторы, определяемые следующим образом:

$$U(\lambda) = \begin{pmatrix} 1_{\mathfrak{H}_1} & 0 \\ W_2 N_\lambda & 1_{\mathfrak{H}_2} \end{pmatrix}, \quad Q(\lambda) = \begin{pmatrix} \Phi_1 N_\lambda & \Phi_1 L_\lambda \Phi_2^* \\ W_2 N_\lambda & W_2 L_\lambda \Phi_2^* \end{pmatrix},$$

$$K(\lambda) = \begin{pmatrix} \Phi_1 N_\lambda & \Phi_1 L_\lambda \Phi_2^* \\ -W_2 N_\lambda \Phi_1 N_\lambda & W_2 (1_{\mathfrak{H}_2} - N_\lambda \Phi_1) L_\lambda \Phi_2 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно показать, что при всех $\lambda \in \rho(L_1)$

$$U(\lambda), \quad U(\lambda)^{-1}, \quad Q(\lambda), \quad K(\lambda) \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}),$$

$$1_{\mathfrak{H}} + Q(\lambda) = U(\lambda)[1_{\mathfrak{H}} + K(\lambda)]. \tag{9}$$

Как видно из изложенных результатов, $1_{\mathfrak{H}} + Q(\lambda)$ можно интерпретировать как бесконечномерный аналог матрицы Ароншайна — Вайнштейна [1].

Лемма 3. Пусть $\lambda \in \rho(L_1)$. Отображение $(h_1, h_2) \to Y$, где $h_i \in \mathfrak{H}_i$, $i = 1, 2$,

$$Y = N_\lambda h_1 + L_\lambda \Phi^* h_2, \tag{10}$$

является взаимно однозначным отображением $Z(1_{\mathfrak{H}} + Q(\lambda))$ на $Z(S - \lambda 1_H)$, обратное к которому определяется соотношениями

$$h_i = -W_i y, \quad i = 1, 2. \tag{11}$$

---

[1] Для всякого $T \in \mathfrak{s}(H)$ полагаем: $\rho(T)$, $\sigma(T)$ — резольвентное множество и спектр оператора T; $T_\lambda = (T - \lambda 1_H)^{-1}$, $\lambda \in \rho(T)$, кроме того, будем писать L_λ, M_λ вместо $L_{1\lambda}$, $M_{1\lambda}$.

В частности, λ является собственным значением оператора S тогда и только тогда, когда $Z(1_{\mathfrak{H}} + Q(\lambda)) \neq \{0\}$.

Доказательство. Пусть $(S - \lambda 1_H) Y = 0$, т. е.

$$(W_1 - \Phi_1) Y = 0, \quad (L - \lambda 1_H) Y = -\Phi_2^* W_2 Y.$$

Положим $h_2 = -W_2 y$. Из леммы 2 следует, что существует $h_1 \in \mathfrak{H}_1$, такое, что $Y = N_\lambda h_1 + L_\lambda \Phi_2^* h_2$, причем соотношение (6) показывает, что $W_1 Y = -h_1$. Таким образом,

$$(W_1 - \Phi_1)[N_\lambda h_1 + L_\lambda \Phi_2^* h_2] = 0,$$

$$W_2 [N_\lambda h_1 + L_\lambda \Phi_2^* h_2] = -h_2,$$

т. е. $[1_{\mathfrak{H}} + Q(\lambda)](h_1, h_2) = 0$.

Аналогично доказывается, что для всякого $h = (h_1, h_2) \in Z(1_{\mathfrak{H}} + Q(\lambda))$ элемент Y, определяемый согласно формуле (10), принадлежит $Z(S - \lambda 1_H)$ и что h_1, h_2 выражаются через Y в соответствии с выражениями (11).

Теорема. Пусть $\lambda \in \rho(L_1)$. $\lambda \in \rho(S)$ тогда и только тогда, когда $Z(1_{\mathfrak{H}} + Q(\lambda)) = \{0\}$. В этом случае для всех $f \in H$

$$S_\lambda f = L_\lambda f - (N_\lambda, L_\lambda \Phi_2^*)[1_{\mathfrak{H}} + Q(\lambda)]^{-1} (\Phi_1, W_2) L_\lambda f. \tag{12}$$

Доказательство. Пусть $\lambda \in \rho(L_1) \cap \rho(S)$. Тогда в силу леммы $Z(1_{\mathfrak{H}} + Q(\lambda)) = \{0\}$. Наоборот, пусть $\lambda \in \rho(L_1)$ и $Z(1_{\mathfrak{H}} + Q(\lambda)) = \{0\}$. Учитывая компактность оператора $K(\lambda)$ и соотношение (9), убеждаемся, что $(1 + Q(\lambda))^{-1} \in \mathscr{B}(\mathfrak{H})$. Кроме того, из леммы 3 следует, что решение уравнения $(S - \lambda 1_H) y = f$, если оно существует, является единственным. Но непосредственная проверка показывает, что оно существует для всех $f \in H$ и совпадает с правой частью (12). Теперь уже ясно, что $\lambda \in \rho(S)$ и справедливо равенство (12).

Следствие. Для всех $\lambda \in \rho(L_1) \cap \rho(S)$

$$S_\lambda - L_\lambda \in \mathscr{B}_\infty(H).$$

Доказательство. Как было показано в процессе доказательства теоремы, при рассматриваемых $\lambda (1_{\mathfrak{H}} + Q(\lambda))^{-1}$, а следовательно, и $(1_{\mathfrak{H}} + K(\lambda))^{-1}$ принадлежит $\mathscr{B}(\mathfrak{H})$. Пусть $X(\lambda) = (1_{\mathfrak{H}} + K(\lambda))^{-1} - 1_{\mathfrak{H}}$. Из тождества $X(\lambda) = -[1_{\mathfrak{H}} + X(\lambda)] K(\lambda)$ следует компактность оператора $X(\lambda)$. Учитывая это и подставляя в выражение (12) $(1_{\mathfrak{H}} + X(\lambda)) U(\lambda)^{-1}$ вместо $(1_{\mathfrak{H}} + K(\lambda))^{-1}$, видим, что $S_\lambda - L_\lambda \in \mathscr{B}_\infty(H)$.

Аналогично доказывается, что если Φ_1, Φ_2 — ядерные операторы, то таким же является $S_\lambda - L_\lambda$. Поэтому абсолютно непрерывные части операторов S и L_1 в случае их самосопряженности унитарно эквивалентны. В общем случае доказанное следствие дает возможность заключить, что существенные спектры операторов S и L_1 совпадают.

1. *Като Т.* Теория возмущений.— М. : Мир, 1972.— 740 с.
2. *Лянце В. Э.* Элементы функционального анализа.— Львов : Вища школа, 1976.— 102 с.
3. *Лянце В. Э.* О некоторых соотношениях между замкнутыми операторами.— Докл. АН СССР, 1972, **204**, № 3, с. 542—545.
4. *Лянце В. Е., Сторож О. Г.* Умови взаємної спряженості деяких замкнутих операторів в термінах абстрактних граничних операторів.— Доп. АН УРСР. Сер. А., 1980, № 6, с. 29—32.

Львовский университет,
Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР, Львов

Получено 22.02.82