16. *Спрингер Дж.* Введение в теорию римановых поверхностей.— М. : Изд-во иностр. лит., 1960.— 317 с.
17. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны.— М. : Мир, 1977.— 622 с.
18. *Kaup D., Newell A.* An exact solution for a Derivative nonlinear Schredinger equation.— J. Math. Phys., 1978, **19**, N 4, p. 798—801.
19. *Kawata T., Inoue H.* Exact solutions of the derivative nonlinear Schredinger equation under nonvanishing conditions.— J. Phys. Soc. Jap., 1978, **44**, N 6, p. 1968—1976.
20. *Kawata T., Kobayashi N., Inoue H.* Soliton solutions of the Derivative Nonlinear Schredinger equations.— Ibid., 1979, **46**, N 3, p. 1008—1015.
21. *Kawata T., Sakai J., Kobayashi N.* Inversemethod for the Mixed nonlinear Schredinger equation and Soliton solutions.— Ibid., 1980, **48**, N 4, p. 1371—1379.
22. *Kawata T., Sakai J.* Linear problems assothiated with the Derivative Nonlinear Schredinger Equation.— Ibid., **49**, N 6, p. 2407—2414.
23. *Lax P. D.* Integrals of nonlinear equations and solitary waves.— Communs Pure and Appl. Math., 1968, **21**, N 2, p. 467—490.
24. *Matveev V. B.* Abelian functions and solutions.— Prepr. Univ. Wroclawskiego, 1976, 373, p. 3—98.
25. *Matveev V. B., Yavor M. I.* Solutions presque peridique et a N-soliton solutions de lèquation hydrodynamique nonlinear de Kaup.— Ann. Inst. H. Poincare A, 1979, **31**, N 1, p. 25—41.
26. *Mjolhus E.* The propagations of circular polarized Alfven waves in plasmas.— J. Plasma Phys., 1976, **16**, N 2, p. 321—328.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР,
Львов

Получено 04.12.81

УДК 517.946

В. Н. Цымбал

О ПОЛНОМ ВЫРОЖДЕНИИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Как известно, к задачам для гиперболических уравнений с малым параметром при старших производных (сингулярно возмущенным задачам) приводят вопросы распространения тепла в пористых средах, теории транспортных потоков, распространения паводковых волн, химических процессов обмена и др. В работах [2, 7] рассмотрена задача Коши для гиперболического уравнения второго порядка, вырождающегося в алгебраическое, когда положить параметр равным нулю. Представляет интерес рассмотреть смешанную задачу для этого случая вырождения, чему посвящена настоящая статья. Отметим, что близкие вопросы рассматривались в работах [1, 10—12].

В области $D_T = \{(x, t): 0 \leqslant x \leqslant l, 0 \leqslant t \leqslant T\}$ рассмотрим задачу

$$L_\varepsilon u \equiv \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + a(x, t) u = f(x, t), \qquad (1)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \qquad (2)$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр. Предположим, что выполняются условия

1) функции $c(x, t)$, $a(x, t)$, $f(x, t)$ достаточно гладкие для проведения дальнейших выкладок;

2) $c(x, t) > 0$, $a(x, t) > 0$ в D_T;

3) $\dfrac{\partial^j f(x, 0)}{\partial t^j} = 0$ $(j = 0, \ldots, 2N + 2)$, где N — произвольное натуральное число, связанное с точностью построенного ниже асимптотического разложения.

Отметим, что смешанная задача для гиперболического уравнения (1), (2) при фиксированном значении параметра $\varepsilon > 0$ имеет единственное решение [5].

Асимптотическое разложение решения задачи (1), (2) строим методом пограничного слоя [3] в виде

$$u(x, t, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{N} \varepsilon^{2i} v_i(x, t) + \sum_{i=0}^{2N} \varepsilon^i \Pi_i(\xi, t) + \sum_{i=0}^{2N} \varepsilon^i Q_i(\eta, t) + R(x, t, \varepsilon). \qquad (3)$$

Здесь $\xi = x/\varepsilon$; $\eta = (l - x)/\varepsilon$; входящие в выражение (3) функции определены ниже.

Применяя стандартный метод теории возмущений, для определения регулярной части асимптотики $v(x, t, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{N} \varepsilon^{2i} v_i(x, t)$ получаем уравнения

$$a(x, t) v_0 = f(x, t), \quad a(x, t) v_i = -\left(\frac{\partial^2 v_{i-1}}{\partial t^2} - c(x, t) \frac{\partial^2 v_{i-1}}{\partial x^2}\right) \quad (i = 1, \ldots, N). \tag{4}$$

Функции $v_i(x, t)$ $(i = 0, \ldots, N)$ рекуррентно и однозначно в силу условий 1), 2) определяются из уравнений (4), а в силу условий 3) — удовлетворяют начальным условиям (третье и четвертое условие (2)).

Обыкновенные пограничные функции $\Pi(\xi, t, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{2N} \varepsilon^i \Pi_i(\xi, t)$ служат для того, чтобы вместе с $v(x, t, \varepsilon)$ удовлетворить граничному условию при $x = 0$. Они определяются с помощью уравнения

$$-c(0, t) \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \xi^2} + a(0, t) \Pi = -[c(0, t) - c(\varepsilon\xi, t)] \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \xi^2} +$$

$$+ [a(0, t) - a(\varepsilon\xi, t)] \Pi - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2}$$

и условий

$$\Pi(0, t, \varepsilon) = -v(x, t, \varepsilon), \quad \Pi(\xi, t, \varepsilon) \underset{\xi \to \infty}{\to} 0.$$

Отсюда для нахождения $\Pi_i(\xi, t)$ $(i = 0, \ldots, 2N)$ получаем задачи

$$-c(0, t) \frac{\partial^2 \Pi_i}{\partial \xi^2} + a(0, t) \Pi_i = G_i(\xi, t), \tag{5}$$

$$\Pi_i(0, t) = -v_{i/2}(0, t), \quad \Pi_i(\xi, t) \underset{\xi \to \infty}{\to} 0,$$

где $G_i(\xi, t)$ линейно выражаются через $\Pi_j(\xi, t)$, $\dfrac{\partial^2 \Pi_{i-2}}{\partial t^2}$, $\dfrac{\partial^2 \Pi_j}{\partial \xi^2}$ $(j < i)$.

Здесь и далее для простоты записи условимся считать, что функция с нецелым индексом тождественно равна нулю. Функции $\Pi_i(\xi, t)$ $(i = 0, \ldots, 2N)$ находятся рекуррентно из уравнений (5), при этом легко показать (методом математической индукции), что П-функции имеют погранслойный характер [3].

Обыкновенные пограничные функции $Q(\eta, t, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{2N} \varepsilon^i Q_i(\eta, t)$ служат для того, чтобы вместе с $v(x, t, \varepsilon)$ удовлетворить граничному условию при $x = l$. Процедура определения Q-функций аналогична способу определения П-функций. Для определения $Q_i(\eta, t)$ $(i = 0, \ldots, 2N)$ получим задачи

$$-c(l, t) \frac{\partial^2 Q_i}{\partial \eta^2} + a(l, t) Q_i = H_i(\eta, t), \tag{6}$$

$$Q_i(0, t) = -v_{i/2}(l, t), \quad Q_i(\eta, t) \to 0$$

при $\eta \to \infty$,

где $H_i(\eta, t)$ линейно выражаются через Q_j, $\dfrac{\partial^2 Q_{i-2}}{\partial t^2}$, $\dfrac{\partial^2 Q_j}{\partial \eta^2}$ $(j < i)$. Легко показать, что Q-функции являются функциями типа пограничного слоя в окрестности границы $x = l$ области D_T.

Остаточный член $R(x, t, \varepsilon)$ является решением задачи

$$L_\varepsilon R = \Phi, \quad R(0, t, \varepsilon) = Q\left(\frac{l}{\varepsilon}, t, \varepsilon\right), \quad R(l, t, \varepsilon) = \Pi\left(\frac{l}{\varepsilon}, t, \varepsilon\right),$$

$$R(x, 0, \varepsilon) = \frac{\partial R(x, 0, \varepsilon)}{\partial t} = 0. \tag{7}$$

Здесь $\Phi(x, t, \varepsilon)$ легко выписать в явном виде и, что существенно, $\Phi(x, t, \varepsilon) = O(\varepsilon^{2N+2})$; в силу экспоненциального убывания П- и Q-функций граничные условия в (7) есть произвольной степени малости, в частности порядка $O(\varepsilon^{2N+2})$. Для доказательства асимптотической корректности разложения (3) необходимо оценить остаточный член. Для этого удобно представить остаточный член в виде

$$R(x, t, \varepsilon) = Z(x, t, \varepsilon) + q(x, t, \varepsilon), \tag{8}$$

где

$$Z(x, t, \varepsilon) = Q\left(\frac{l}{\varepsilon}, t, \varepsilon\right) + \frac{x}{l}\left[\Pi\left(\frac{l}{\varepsilon}, t, \varepsilon\right) - Q\left(\frac{l}{\varepsilon}, t, \varepsilon\right)\right], \tag{9}$$

а $q(x, t, \varepsilon)$ является решением следующей задачи:

$$L_\varepsilon q = F(x, t, \varepsilon), \quad q(0, t, \varepsilon) = q(l, t, \varepsilon) = q(x, 0, \varepsilon) = \frac{\partial q(x, 0, \varepsilon)}{\partial t} = 0. \tag{10}$$

Здесь $F(x, t, \varepsilon)$ очевидным образом выражается через $\Phi(x, t, \varepsilon)$, $Z(x, t, \varepsilon)$ и $F(x, t, \varepsilon) = O(\varepsilon^{2N+2})$.

Оценку $q(x, t, \varepsilon)$ получаем методом интегралов энергии [5]. Введем в рассмотрение область $D_\zeta = \{(x, t) : 0 \leqslant x \leqslant l, \ 0 \leqslant t \leqslant \zeta\,(0 \leqslant \zeta \leqslant T)\}$. Исходим из легко проверяемого тождества

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\varepsilon^2\left[\left(\frac{\partial q}{\partial t}\right)^2 + c(x, t)\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2\right] + a(x, t)\,q^2\right\} - 2\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial x}\left(c(x, t)\frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial q}{\partial t}\right) =$$

$$= 2F(x, t, \varepsilon)\frac{\partial q}{\partial t} + \varepsilon^2\left(\frac{\partial c(x, t)}{\partial t}\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2 - 2\frac{\partial c(x, t)}{\partial x}\frac{\partial q}{\partial t}\frac{\partial q}{\partial x}\right) + \frac{\partial a(x, t)}{\partial t}q^2. \tag{11}$$

Интегрируя его по области D_ζ с использованием формулы Грина и учитывая начальные и граничные условия, получаем

$$\int_0^l\left\{\varepsilon^2\left[\left(\frac{\partial q(x, \zeta)}{\partial t}\right)^2 + c(x, \zeta)\left(\frac{\partial q(x, \zeta)}{\partial x}\right)^2\right] + a(x, \zeta)\,q^2(x, \zeta)\right\}dx =$$

$$= 2\iint_{D_\zeta} F\frac{\partial q}{\partial t}\,dD_\zeta + \iint_{D_\zeta}\left\{\varepsilon^2\left[\frac{\partial c}{\partial t}\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2 - 2\frac{\partial c}{\partial x}\frac{\partial q}{\partial t}\frac{\partial q}{\partial x}\right] + \frac{\partial a}{\partial t}q^2\right\}dD_\zeta. \tag{12}$$

Использование неравенства Коши с параметром дает

$$2\iint_{D_\zeta}\left|F\frac{\partial q}{\partial t}\right|dD_\zeta \leqslant \varepsilon^2\iint_{D_\zeta}\left(\frac{\partial q}{\partial t}\right)^2 dD_\zeta + \frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{D_\zeta}F^2 dD_\zeta. \tag{13}$$

Оценивая выражение (12) с использованием (13), находим

$$\int_0^l\left\{\varepsilon^2\left[\left(\frac{\partial q(x, \zeta)}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial q(x, \zeta)}{\partial x}\right)^2\right] + q^2(x, \zeta)\right\}dx \leqslant \frac{1}{K\varepsilon^2}\iint_{D_T}F^2 dD_T +$$

$$+ K_1\int_0^\zeta\left\{\int_0^l\left(\varepsilon^2\left[\left(\frac{\partial q(x, \tau)}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial q(x, \tau)}{\partial x}\right)^2\right] + q^2(x, \tau)\right)dx\right\}d\tau, \tag{14}$$

где $K = \min\{\min\limits_{D_T} c(x, t), \min\limits_{D_T} a(x, t), 1\}$; константа K_1 зависит от максимума модулей по области D_T величин $\frac{\partial c(x, t)}{\partial t}$, $\frac{\partial c(x, t)}{\partial x}$, $\frac{\partial a(x, t)}{\partial t}$ и не зависит от ε. После применения неравенства Гроуолла — Беллмана [9] и интегрирования результата по ζ в пределах от 0 до T, получаем

$$\iint_{D_T}\left\{\varepsilon^2\left[\left(\frac{\partial q}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2\right] + q^2\right\}dD_T \leqslant C_1\varepsilon^{4N+2}. \tag{15}$$

Здесь константа C_1 не зависит от ε.

Учитывая формулу (9) и замечание о входящих сюда функциях, заключаем, что для $Z(x, t, \varepsilon)$ справедлива оценка, аналогичная (15). Как следствие этого и результата (8) получаем окончательно оценку

$$\iint\limits_{D_T} \left\{\varepsilon^2 \left[\left(\frac{\partial R}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)^2\right] + R^2\right\} dD_T \leqslant C\varepsilon^{4N+2}, \tag{16}$$

которая и доказывает асимптотический характер разложения (3).

Сформулируем результат настоящей работы.

Теорема. Пусть выполняются условия 1) — 3). Тогда решение задачи (1), (2) допускает асимптотическое разложение (3), где $v_i(x, t)$ $(i = 0, \ldots$ $\ldots, N)$ определяются из уравнений (4); функции Π_i (ξ, t), Q_i (η, t) — суть функции типа пограничного слоя в окрестности границ $x = 0$ и $x = l$ соответственно и являются решениями задач (5), (6); R (x, t, ε) удовлетворяет неравенству (16).

Если условие 3) не выполняется, то задача не поддается исследованию методом програничного слоя. Возможно, что в этом случае асимптотика может быть построена методом подъема в пространство большей размерности [6], методом согласования асимптотических разложений [4] или методом канонического оператора [8] при соответствующем развитии этих методов.

1. *Бутузов В. Ф.* Угловой погранслой в смешанных сингулярно возмущенных задачах для гиперболических уравнений.— Мат. сб., 1977, **104**, № 3, с. 460—485.
2. *Валиев М. А.* Асимптотическое решение задачи Коши для гиперболического уравнения с параметром.— Тр. Моск. энергет. ин-та, 1972, вып. 146, с. 2—12.
3. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром.— Успехи мат. наук, 1957, **12**, № 5, с. 3—122.
4. *Ильин А. М., Леликова Е. Ф.* Метод сращивания асимптотических разложений для уравнения $\varepsilon\Delta u - a(x, y)\, u_y = f(x, y)$ в прямоугольнике.— Мат. сб., 1975, **96**, № 4, с. 568—583.
5. *Курант Р.* Уравнения с частными производными.— М. : Мир, 1964.— 840 с.
6. *Ломов С. А.* Формализм неклассической теории возмущений.— Докл. АН СССР, 1973, **212**, № 1, с. 33—36.
7. *Маслов В. П.* Переход при $h \to 0$ уравнения Гейзенберга в уравнение движения одноатомного идеального газа.— Теорет. и мат. физика, 1969, **1**, № 31, с. 378—383.
8. *Мищенко А. С., Стернин Б. Ю., Шаталов В. Е.* Лагранжевы многообразия и метод канонического оператора.— М. : Наука, 1978.— 352 с.
9. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.— М. : Мир, 1970.— 720 с.
10. *Цимбал В. М.* Задача Коші для гіперболічного рівняння з малим параметром.— В кн.: Питання якісної теорії диференціальних рівнянь та їх застосування. К. : Наук. думка, 1978, с. 63—64.
11. *Цимбал В. М.* Задача Коші для сингулярно збуреного гіперболічного рівняння.— Вісн. Льв. ун-ту. Сер. мех.-мат., 1981, вип. 18, с. 11—14.
12. *Шафиев Н. К.* Асимптотика по малому параметру решения смешанной задачи для одного гиперболического уравнения.— Докл. АН СССР, 1980, **252**, № 5, с. 1074—1078.

Львовский университет

Получено 22.06.81

УДК 519.21

Р. В. Бобрик

О ПЛОТНОСТИ МЕРЫ, СООТВЕТСТВУЮЩЕЙ РЕШЕНИЮ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ СО СЛУЧАЙНЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

В настоящей статье рассматриваются вопросы абсолютной непрерывности меры, порожденной решением характеристической задачи для нелинейного дифференциального уравнения гиперболического типа с гауссовым возмущением относительно некоторой гауссовой меры и вычисляется соответствующая плотность.

В области $D = \{(x, y)\colon 0 \leqslant x \leqslant a_1,\ 0 \leqslant y \leqslant a_2\}$ рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} + f(x, y, u(x, y)) = \xi(x, y) + b(x, y),$$
$$u(x, 0) = \varphi_1(x), \quad u(0, y) = \varphi_2(y), \quad \varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0, \tag{1}$$