Коэффициенты $a_{n\nu}$, $a_{n\nu j}$, $b_{nj}$, $b_{nj\nu}$ $c_{nj}$, $d_{n\nu}$, $e_{nj}$ ввиду их громоздкости здесь выписывать не будем (выражения для них можно получить, используя результаты работы [2]). Свободные члены ($s_{nj}$, $s_{n\nu}$, $\overset{*}{s}_{n\nu}$) в этих уравнениях являются коэффициентами разложения в ряды Фурье и Фурье — Бесселя падающей плоской волны в областях $r = 1$, $|z| < h$ и $z = h$, $r < 1$.

Уравнения (10) вместе с уравнениями (12) составляют полную систему уравнений для определения неизвестных коэффициентов, через которые выражается решение рассматриваемой задачи. Используя результаты работы [2], можно заключить, что для неизвестных коэффициентов бесконечной системы справедливы асимптотические равенства

$$\lim_{\nu\to\infty} E_{n\nu} g_2 I_n'(g_2) = \lim_{j\to\infty} B_{nj} \frac{J_n(\gamma_{jn})}{h} = a_0, \quad \lim_{\nu\to\infty} H_{n\nu} = \text{const}. \tag{13}$$

Условия (13) дают возможность аналогично работе [2] построить эффективный алгоритм решения бесконечной системы (10), (12).


1. *Григолюк Э. И., Горшков А. Г.* Нестационарная гидроупругость оболочек.— Л. : Судостроение, 1974.— 207 с.
2. *Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах.— Киев : Наук. думка, 1981.— 284 с.
3. *Мэтсавэзр Я. А., Векслер Н. Д., Стулов Я. С.* Дифракция акустических импульсов на упругих телах.— М. : Наука, 1979.— 226 с.
4. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики.— М. : Наука, 1977.— 735 с.



Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР



Поступила в редколлегию 26.02.82



УДК 517.96



В. С. Заячковский


## ОДИН КРИТЕРИЙ ФАКТОРИЗАЦИИ ОПЕРАТОРНЫХ ПУЧКОВ С НЕОБРАТИМЫМ СТАРШИМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

Пусть задан регулярный ($\det A(z) \not\equiv 0$) операторный пучок $A(z) = z^n A_0 + z^{n-1} A_1 + \ldots + A_n$, где $A_i$ — линейные операторы, действующие в линейном пространстве $E$, $\dim E = d$. Операторный пучок $B(z) = z^m 1_E + z^{m-1} B_1 + \ldots + B_m$, $m \leqslant n$, называется левым делителем пучка $A(z)$, если существует пучок $C(z)$ такой, что $A(z) = B(z)\, C(z)$. Делитель называется правильным, а факторизация спектральной, если спектры пучков $B(z)$ и $C(z)$ не пересекаются: $\sigma(B) \cap \sigma(C) = \varnothing$.

Задача факторизации операторных пучков рассматривалась обычно в предположении обратимости оператора $A_0$ [1 — 3, 5]. В общем случае в работе [4] был получен следующий результат.

**Теорема.** Регулярный пучок $A(z)$ имеет правильный левый делитель $B(z)$, спектр которого совпадает с заданной частью спектра $\sigma$ пучка $A(z)$ тогда и только тогда, когда: а) суммарная кратность собственных значений $z \in \sigma$ равна $md$; б) $\operatorname{Im} S_0^{(nd,\, m)}(A, \sigma) = \operatorname{Im} S_0^{(nd,\, m+1)}$; в) оператор $S_0^{(nd,\, m)}(A, \sigma)$ обратим слева; здесь $S_r^{(p,\, q)}(A, \sigma)$ — ганкелева оператор-матрица вида

$$S_r^{(p,q)}(A, \sigma) = \| s_{r+i+j-1} \|; \quad i = \overline{1, p}, \ j = \overline{1, q}, \ r = 0, 1, \ldots, \tag{1}$$

а $s_j = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_\Gamma z^j A^{-1}(z)\, dz$, $j = 0, 1, \ldots$; $\Gamma$ — положительно ориентированный замкнутый спрямляемый контур, внутренность которого содержит $\sigma$ и не содержит точек $\sigma(A) \setminus \sigma$.

В настоящей заметке для решения вопроса факторизации операторных пучков с необратимым старшим коэффициентом развивается подход [1], основанный на систематическом использовании свойств ганкелевых оператор-матриц $S_r^{(p,q)}$. Устанавливается специальное представление таких матриц, на основании которого существенно уточняется теорема Лопатинского. Оказывается, теорема справедлива, если вместо матрицы $S_0^{(nd,m)}$ блочного размера $nd \times m$ использовать матрицу $S_0^{(n,m)}$ размера в $d$ раз меньшего.

Пусть $\sigma = \{z_1, \ldots, z_N\}$, а соответствующие наборы частных спектральных кратностей равны $\nu(z_j) = \{\nu_{j1}, \ldots, \nu_{jl_j}\}_{j=\overline{1,N}}$. Ганкелевы оператор-матрицы $S_r^{(p,q)}$ допускают следующее представление.

**Предложение 1.** Найдутся канонические системы собственных и присоединенных векторов пучков $A(z)$ и (сопряженного) $A^*(z)$:

$$\{v_{ks,j};\quad k=\overline{1,\ l_j},\ s=\overline{0,\ \nu_{jk-1}}\},$$

$$\{u_{ks,j};\quad k=\overline{1,\ l_j},\ s=\overline{0,\ \nu_{jk-1}}\},$$

отвечающие собственному значению $z_j$ и такие, что

$$S_r^{(p,q)}(A,\ \sigma) = \begin{bmatrix} V_\sigma \\ V_\sigma J_\sigma \\ \vdots \\ V_\sigma J_\sigma^{p-1} \end{bmatrix} J_\sigma^r\,[U_\sigma',\ J_\sigma U_\sigma',\ \ldots,\ J_\sigma^{q-1}U_\sigma'],$$

где $J_\sigma = \operatorname{diag}_{(j)} J(z_j)$; $J(z_j) = \operatorname{diag}_{(k)} J(z_j;\ \nu_{jk})$; $J(z_j,\ \nu_{jk})$ — $z_j$-клетка Жордана размера $\nu_{jk}$; индексы изменяются в пределах $j=\overline{1,\ N}$, $k=\overline{1,\ l_j}$, $s=\overline{0,\ \nu_{jk-1}}$.

При доказательстве предложения 1 существенно используется спектральное разложение резольвенты пучка $A(z)$.

Рассмотрим оператор-матрицы $S_0^{(n,j)}(A,\sigma)$, у которых количество строк фиксировано: $n=\deg A(z)$. Очевидно, что $\operatorname{Im} S_0^{(n,m)} \subset \operatorname{Im} S_0^{(n,m+1)}$. Наименьшее число $m$ такое, что $\operatorname{Im} S_0^{(n,m)} = \operatorname{Im} S_0^{(n,m+1)}$, назовем индексом стабилизации матриц обобщенных моментов резольвенты пучка $A(z)$ относительно части спектра $\sigma$ и обозначим через $\operatorname{ind}(A,\sigma)$.

**Предложение 2.** Для всех $k \geqslant \operatorname{ind}(A,\sigma)$ имеет место равенство

$$\operatorname{Im} S_0^{(n,k)}(A,\ \sigma) = \operatorname{Im} S_0^{(n,\operatorname{Ind}(A,\sigma))}(A,\ \sigma).$$

При доказательстве используется специальное представление матриц $S_r^{(p,q)}$ (предложение 1) и теорема о стабилизации ранга $n$-кратных расширений канонических цепочек собственных и присоединенных векторов операторного пучка.

Предположим, что пучок $B(z)$ является левым правильным делителем пучка $A(z)$. Тогда его коэффициенты необходимо удовлетворяют операторному уравнению

$$S_0^{(n,m)}\,\|B_{m-i+1}\|_{i=\overline{1,m}} = -S_m^{(n,1)}. \tag{2}$$

Предложения 1 и 2 позволяют установить условия, необходимые и достаточные для того, чтобы решения уравнения (2) определяли левый правильный делитель пучка $A(z)$. Справедлив следующий критерий факторизации.

**Предложение 3.** Регулярный пучок $A(z)$ имеет правильный левый делитель $B(z)$, спектр которого совпадает с заданной частью $\sigma$ спектра $\sigma(A)$ пучка $A(z)$ тогда и только тогда, когда: а) суммарная кратность собственных значений $\lambda \in \sigma$ равна $md$; б) $\operatorname{ind}(A, \sigma) \leqslant m$; $S_0^{(n,m)}(A, \sigma)$ обратим слева.

Легко видеть, что если правильный делитель существует, то он единственен, так как его коэффициенты определяются уравнением (2), причем $\operatorname{Ker} S_0^{(n,m)} = 0$.


1. *Балинский А. И., Заячковский В. С.* О критериях факторизации операторных пучков в банаховом пространстве.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1982, вып. 16, с. 14—19.
2. *Кабак В. И., Маркус А. С., Мереуца И. В.* О связи между спектральными свойствами полиномиального операторного пучка и его делителей.— Мат. исследования, 1977, № 45, с. 29—57.
3. *Лопатинский Я. Б.* Разложение полиномиальной матрицы на множители.— Науч. зап. Львов. политехн. ин-та, 1956, № 38, с. 3—7.
4. *Лопатинский Я. Б.* О некоторых свойствах полиномиальных матриц.— В кн.: Краевые задачи математической физики. Киев: Наук. думка, 1979, с. 108—116.
5. *Langer H.* Factorization of operator pensils.— Acta sci. math., 1976, 38, N $^1/_2$, p. 83—96.



Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР



Поступила в редколлегию
01.06.83