

М. Я. Бартиш, И. В. Огирко, Л. Л. Роман

**РЕШЕНИЕ МЕТОДОМ ТИПА НЬЮТОНА — КАНТОРОВИЧА
НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ГИБКОЙ ОБОЛОЧКИ
С ТЕМПЕРАТУРНОЙ ЗАВИСИМОСТЬЮ ХАРАКТЕРИСТИК МАТЕРИАЛА**

Суть предлагаемой методики состоит в том, чтобы свести решение нелинейной краевой задачи к решению задачи Коши и некоторой специальным образом построенной системы алгебраических уравнений, решаемой методом работы [2]. В данной работе указанная методика применяется для исследования напряженно-деформированного состояния пологой круглой оболочки под воздействием силового и температурного поля с учетом больших прогибов и зависимости модуля упругости и коэффициента линейного температурного расширения от температуры. Методика доведена до программы расчета на ЭВМ.

Разрешающие дифференциальные уравнения для круглой гибкой оболочки радиуса R ($0 \leq r \leq R$) относительно прогиба $W(r)$ и функции напряжений $\Phi(r)$ имеют вид [3]

$$D_2 \nabla^2 \nabla^2 W = q - 2 \frac{dD_2}{dr} \frac{d^3 W}{dr^3} - \left[\nabla^2 D_2 + \frac{1}{r} \frac{dD_2}{dr} + \frac{\nu}{r} \frac{dD_2}{dr} \right] \frac{d^2 W}{dr^2} - \left[\frac{\nu}{r} \frac{d^2 D_2}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dD_2}{dr} \right] \frac{dW}{dr} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[\frac{d\Phi}{dr} \frac{d(W + W_H)}{dr} \right], \quad (1)$$

$$\frac{d}{dr} (\nabla^2 \Phi) = \frac{1}{D_0} \left(\frac{d^2 \Phi}{dr^2} - \frac{\nu}{r} \frac{d\Phi}{dr} \right) \frac{dD_0}{dr} + \frac{1}{D_0} \frac{dD_0}{dr} (1 - \nu) N - (1 - \nu) \frac{dN}{dr} - \frac{D_0 (1 - \nu^2)}{r} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dW}{dr} \right)^2 + \frac{dW}{dr} \frac{dW_H}{dr} \right], \quad (2)$$

где $\nabla^2 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}$; $D_0 = \frac{h}{1 - \nu} E$; $D_2 = \frac{h^2}{1 - \nu^2} E$; $N = \frac{h}{1 - \nu} E \alpha t$;

h — толщина ($0 \leq \gamma \leq h$); $W_H = W_H(r)$ — начальный подъем оболочки; $t = t(r, \gamma)$ — температурное поле; $q = q(z)$ — силовая нагрузка; $E = E(t)$ — модуль упругости; $\alpha = \alpha(t)$ — коэффициент линейного температурного расширения материала; ν — коэффициент Пуассона. Для численного решения задачи удобно перейти к безразмерным координатам $\rho = \frac{r}{R}$, $\gamma^* = \frac{\gamma}{h}$ и величинам

$$W^* = \frac{W}{h}, \quad \Phi^* = \frac{\Phi}{E_0 h^3}, \quad T^* = \frac{t}{T_0}, \quad E^* = \frac{E}{E_0}, \quad \alpha^* = \frac{\alpha}{\alpha_0}, \quad (3)$$

$$W_H^* = \frac{W_H}{h}, \quad q^* = \frac{q R^4}{E_0 h^4}, \quad b_1 = \frac{\alpha_0 T_0 R^2}{h^2}.$$

Здесь T_0 , E_0 , α_0 — характерные значения температуры и характеристик материала.

Для изложения предлагаемой методики рассмотрим случай жесткого защемления оболочки, т. е. условия при $\rho = 1$:

$$W^* = 0, \quad \frac{dW^*}{d\rho} = 0, \quad \left[\frac{d^2 \Phi^*}{d\rho^2} - \nu \frac{d\Phi^*}{d\rho} \right] = b_1 \alpha^* E^* T^*, \quad (4)$$

где $b_1 = \frac{\alpha_0 T_0 R^2}{h^2}$. В связи с симметрией задачи относительно $\rho = 0$ используем условие симметрии в этой точке

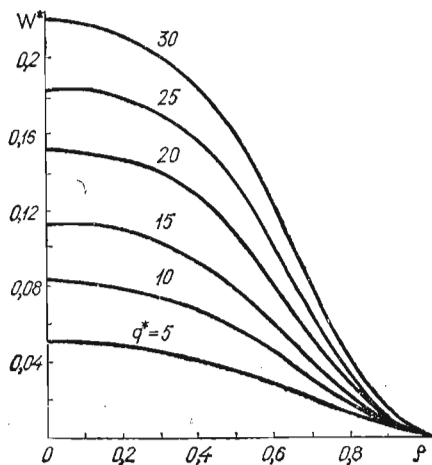
$$\frac{dW^*}{d\rho} = 0, \quad \frac{d^3 W^*}{d\rho^3} = 0, \quad \frac{d\Phi^*}{d\rho} = 0, \quad \frac{d^3 \Phi^*}{d\rho^3} = 0. \quad (5)$$

Введем следующую замену функций:

$$z_1 = \frac{d\Phi^*}{d\rho}, \quad z_2 = \nabla^2\Phi^*, \quad z_3 = \frac{dW^*}{d\rho}, \quad z_4 = \nabla^2W^*, \quad (6)$$

$$z_5 = \frac{d}{d\rho}(\nabla^2W^*), \quad z_6 = W^*.$$

Теперь краевая задача (1), (2), (4), (5), согласно работе [4], эквивалентна решению системы нелинейных алгебраических уравнений относительно неизвестных z_4^0, z_5^0, z_6^0



$$z_2(z_1^0, z_2^0, \dots, z_6^0, 1) - (1 + \nu)z_1(z_1^0, z_2^0, \dots, z_6^0, 1) - b_1\alpha^*E^*T^* = 0, \quad (7)$$

$$z_3(z_1^0, z_2^0, \dots, z_6^0, 1) = 0,$$

$$\dots$$

$$z_6(z_1^0, z_2^0, \dots, z_6^0, 1) = 0,$$

при $\rho = 1$ и задаче Коши

$$\frac{dz_1}{d\rho} = z_2 - \frac{z_1}{\rho},$$

$$\frac{dz_2}{d\rho} = A_4 \left(z_2 - \frac{1+\nu}{\rho} z_1 \right) - \frac{1-\nu^2}{\rho} \times$$

$$\times D_0^* \left(\frac{1}{2} z_3^2 + z_3 \frac{dW_H^*}{d\rho} \right) +$$

$$+ b_1(1-\nu) \frac{d}{d\rho} \left(\frac{N^*}{D_0^*} \right),$$

$$\frac{dz_3}{d\rho} = z_4 - \frac{z_3}{\rho}, \quad (8)$$

$$\frac{dz_4}{d\rho} = z_5,$$

$$\frac{dz_5}{d\rho} = -\frac{z_5}{\rho} + \frac{1}{D_2^*} \left\{ q^* - A_1 \left[z_5 - \frac{1}{\rho} \left(z_4 - \frac{2}{\rho} z_3 \right) \right] - A_2 \left(z_4 - \frac{r_3}{\rho} \right) - A_3 z_3 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\rho} \left[\left(z_3 z_2 - \frac{2z_3 z_4}{\rho} + z_1 z_4 \right) + \left(z_2 - \frac{z_1}{\rho} \right) \frac{dW_H^*}{d\rho} + z_1 \frac{d^2 W_H^*}{d\rho^2} \right] \right\},$$

$$\frac{dz_6}{d\rho} = z_3$$

при начальных условиях

$$z_i(0) = z_i^0, \quad i = \overrightarrow{1, 6}, \quad (9)$$

где

$$A_1 = 2 \frac{dD_2^*}{d\rho}; \quad A_2 = \frac{d^2 D_2^*}{d\rho^2} + \frac{2+\nu}{\rho} \frac{dD_2^*}{d\rho};$$

$$A_3 = \frac{1}{\rho} \left(\nu \frac{d^2 D_2^*}{d\rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{dD_2^*}{d\rho} \right); \quad A_4 = \frac{1}{D_0^*} \frac{dD_0^*}{d\rho};$$

$$D_0^* = \frac{E^*}{1-\nu}; \quad D_2^* = \frac{2E^*}{1-\nu^2}; \quad N^* = \frac{1}{1-\nu} E^* \alpha^* T^*,$$

причем z_1^0, z_2^0, z_3^0 известны из условий (5). Для решения системы (7) применяется класс итерационных методов типа Ньютона — Канторовича [2]

$$\vec{v}_n^{(1)} = \vec{x}_n - U_n P(\vec{x}_n),$$

$$\vec{v}_n^{(i+1)} = \vec{v}_n^{(i)} - U_n P(\vec{v}_n^{(i)}), \quad i = 1, 2, \dots, p-1, \quad (10)$$

$$\vec{x}_{n+1} = \vec{v}_n^{(p)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Здесь $U_n = [P(x_n, \tilde{x}_n)]^{-1}$, $P(x_n, \tilde{x}_n)$ — разделенные разности первого порядка;

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} z_4^0 \\ z_5^0 \\ z_6^0 \end{pmatrix}; \quad P(\vec{x}) = \begin{pmatrix} z_2(\vec{x}, 1) - (1 + \nu) z_1(\vec{x}, 1) - b_1 \alpha^* E^* T^* \\ z_3(\vec{x}, 1) \\ z_6(\vec{x}, 1) \end{pmatrix}.$$

Параметр рекурсии p определяется таким образом, чтобы метод был наиболее эффективным в смысле количества операций [1]. Практическая реализация обосновала необходимость выбора оптимальной глубины рекурсии $p = 3$, что также подтверждается теоретическими расчетами.

По разработанной методике на языке АЛГОЛ применительно к ЭВМ М-222 составлена программа расчета оболочки, которая применима для различной силовой нагрузки, произвольного распределения температурного поля в рамках принятой модели уравнений, различного подъема оболочки, а также для произвольной зависимости характеристик материала от температуры. Соответствующие функции могут задаваться в программе таблично или с использованием необходимой аппроксимации. Проведены расчеты для стальной полой оболочки с начальным прогибом $W_n^* = -(1 - \rho)$ при воздействии температуры T^* по закону $T^* = \rho$. Температурная зависимость характеристик материала принималась следующей: $E^* = 1 - 0,25T^*$, $\alpha^* = 1 + 0,47T^*$. На рисунке представлены графики безразмерного прогиба W^* по радиусу оболочки для различных значений силовой нагрузки.

1. *Бартин М. Я.* Про один итерационный метод развязывания функциональных уравнений. — Доп. АН УРСР. Сер. А, 1968, № 5, с. 387—391.
2. *Бартин М. Я., Роман Л. Л.* Возмущенные аналоги рекурсивных итерационных методов типа Ньютона — Канторовича. — В кн.: II симпозиум по методам решения нелинейных уравнений и задач оптимизации (Хаапсалу, июнь 1981): Докл. и сообщ. Таллин: Изд-во АН ЭССР, 1981, т. 1, с. 81—83.
3. *Расчеты на прочность, устойчивость и колебания в условиях высоких температур / Н. И. Безухов, В. Л. Бажанов, И. И. Гольденблат и др.* — М.: Машиностроение, 1965. — 567 с.
4. *Шаманский В. Е.* Методы численного решения краевых задач на ЭЦВМ. — Киев: Наука, 1966. — Ч. 2. 242 с.

Львовский университет

Поступила в редколлегию
21.12.81

УДК 538.56

Р. В. Фильц, И. М. Музыка

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК НАМАГНИЧИВАНИЯ СЛОИСТОЙ ФЕРРОМАГНИТНОЙ СРЕДЫ ПРИ ОДНОМЕРНОМ ПЕРИОДИЧЕСКОМ НАМАГНИЧИВАНИИ

Композитные материалы, состоящие из тонких листов проводящего магнитно-мягкого ферромагнетика, разделенных немагнитными прослойками, находят широкое применение в электроэнергетических и электрофизических устройствах при выполнении их магнитопроводов. Как правило, они работают в условиях перемагничивания в одномерном магнитном поле, изменяющемся во времени по заданному периодическому закону. Процесс проектирования таких устройств требует наличия для рассматриваемых композитных материалов их эквивалентных характеристик намагничивания, отражающих связи между некоторыми интегральными величинами, характеризующими процесс перемагничивания (амплитудами, фазами, частотами усредненной по сечению листа