

Б. Л. Боженко

ОПТИМИЗАЦИЯ ПО НАПРЯЖЕНИЯМ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ
В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Пусть изотропная цилиндрическая оболочка постоянной толщины $2h$, длины b , радиуса R , отнесенная к смешанной ортогональной системе координат (x, φ, γ) , где x — расстояние точки вдоль образующей от начального поперечного сечения; φ — угол между начальной и любой меридиональными плоскостями; γ — расстояние точки от срединной поверхности оболочки, находится под действием неосесимметричного температурного поля $t = T_1 + \frac{\gamma}{h} T_2$. При этом

$$\text{интегральные характеристики температурного поля } T_1 = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h t d\gamma, T_2 = \\ = \frac{3}{2h^2} \int_{-h}^h \gamma t d\gamma \text{ подчинены условиям}$$

$$T_i|_{G_0 \subset G} = f_i, \quad (1)$$

где f_i — заданные функции; $G = \{(x, \varphi) : 0 \leq x \leq b, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ — срединная поверхность оболочки; $G_0 = \{(x, \varphi) : a_j \leq x \leq b_j, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq a_j \leq b_j < a_{j+1} \leq b, j = \overline{1, m}\}$; $i = 1, 2$.

Рассмотрим задачу определения температурных полей, удовлетворяющих условиям (1), при которых напряженное состояние оболочки является оптимальным. Следуя работе [2], в качестве критерия оптимальности принимаем функционал энергии упругой деформации оболочки, который запишем в виде

$$K = \iint_G \left[(B_1 U)^* \left(\frac{1}{2} D B_1 U - C_1 T \right) + \frac{1}{2} T^* C_1^* C_2 T \right] ds, \quad (2)$$

где $U^* = (u, v, w)$ — вектор перемещений срединной поверхности; $T^* = (T_1, T_2)$;

$$B_1^* = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{1}{R} & 0 & \frac{\partial^2}{\partial x^2} & -\frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} & \frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \varphi} \end{pmatrix};$$

$$D = \begin{pmatrix} \frac{D_0}{1-\nu^2} & \frac{D_0 \nu}{1-\nu^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{D_0 \nu}{1-\nu^2} & \frac{D_0}{1-\nu^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{D_0}{1+\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_1 & D_1 \nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_1 \nu & D_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2D_1(1-\nu) \end{pmatrix};$$

$$C_i^* = \begin{pmatrix} c_i & c_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_i & d_i & 0 \end{pmatrix}, \quad i = \overline{1, 2}; \quad c_1 = \frac{D_0 \alpha_t}{1-\nu};$$

$$c_2 = \alpha_t; \quad d_1 = \frac{\alpha_t D_1 (1+\nu)}{h}; \quad d_2 = \frac{\alpha_t}{h}; \quad D_0 = 2Eh;$$

$D_1 = \frac{2}{3} \frac{Eh^3}{1-\nu^2}$; E — модуль упругости; ν — коэффициент Пуассона; α_t — линейный коэффициент температурного расширения; (...) — операция транспонирования.

Функции U и T связаны между собой соотношениями температурной задачи термомеханики в квазистатической постановке [2]. Используя обобщенный принцип Лагранжа [1, 3], вместо указанных соотношений будем требовать выполнения: а) условий стационарности функционала Лагранжа [1], который в принятых обозначениях запишется так:

$$L = \iint_G [(B_1 U)^* \left(\frac{1}{2} DB_1 U - C_1 T \right)] ds - \int_{L_1} [(B_L U)^* N_v] dl, \quad (3)$$

где L_1 — граница области G , на которой заданы обобщенные усилия и моменты N_v ;

$$B_L^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix};$$

б) дополнительных условий

$$B_L U|_{L_2} = U_v, \quad (4)$$

где L_2 — граница области G , на которой заданы обобщенные перемещения U_v .

Таким образом, сформулированная выше задача сводится к нахождению экстремалей функционала $K[U, T]$ на множестве функций T , которые удовлетворяют условиям (1) и обеспечивают стационарное значение функционала $L[U, T]$ на множестве функций U с дополнительными условиями (4). Для решения задачи в такой постановке используем полуаналитический метод конечных элементов [4].

Перейдем к безразмерной координате $\alpha = \frac{x}{b}$ и область G разобьем на конечное число элементов (колец) линиями $\alpha = \alpha_{i-1} = \text{const}$, $i = \overline{1, k+1}$. Получим систему конечных элементов-колец

$$G_i = \{(\alpha, \varphi) : \alpha_{i-1} \leq \alpha \leq \alpha_i, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}. \quad (5)$$

Здесь

$$\alpha_0 = 0; \quad \alpha_k = 1; \quad \alpha_i = \alpha_{i-1} + L_i; \quad L_i > 0; \quad \sum_{i=1}^k L_i = 1; \quad i = \overline{1, k}.$$

В границах каждого элемента G_i функции $U(\alpha, \varphi)$, $T(\alpha, \varphi)$ аппроксимируем выражениями

$$U = \sum_{m=0}^M S_3^m F_i g_i^m, \quad T = \sum_{m=0}^M S_2^m E_i t_i^m, \quad (6)$$

где

$$S_3^m = \begin{pmatrix} \psi_m(\varphi) & 0 & 0 \\ 0 & \psi_{m-1}(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & \psi_m(\varphi) \end{pmatrix}; \quad S_2^m = \begin{pmatrix} \psi_m(\varphi) & 0 \\ 0 & \psi_m(\varphi) \end{pmatrix};$$

$$F_i = \begin{pmatrix} 1 - \frac{s}{L_i} & 0 & 0 & 0 & \frac{s}{L_i} & 0 \\ 0 & 1 - \frac{s}{L_i} & 0 & 0 & 0 & \frac{s}{L_i} \\ 0 & 0 & 1 - \frac{3s^2}{L_i^2} + \frac{2s^3}{L_i^3} & s - \frac{2s^2}{L_i} + \frac{s^3}{L_i^2} & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & \\ & & & 0 & 0 & \\ & & & & \frac{3s^2}{L_i^2} - \frac{2s^3}{L_i^3} & \frac{s^3}{L_i^2} - \frac{s^2}{L_i} \end{pmatrix};$$

$$E_i = \begin{pmatrix} 1 - \frac{s}{L_i} & 0 & \frac{s}{L_i} & 0 \\ 0 & 1 - \frac{s}{L_i} & 0 & \frac{s}{L_i} \end{pmatrix}; \quad s = \alpha - \alpha_{i-1};$$

$$g_i^m = (g_{mi-1}^*, g_{mi}^*)^*; \quad t_i^m = (t_{mi-1}^*, t_{mi}^*)^*; \quad i = \overline{1, k};$$

$$g_{mi}^* = (u^m(\alpha_i), v^m(\alpha_i), w^m(\alpha_i), \partial w^m(\alpha_i)); \quad t_{mi}^* = (T_1^m(\alpha_i), T_2^m(\alpha_i));$$

$u^m, v^m, w^m, \partial w^m, T_1^m, T_2^m$ — коэффициенты разложения функций $u, v, w, \partial w, T_1, T_2$ в конечные ряды Фурье по координате φ ; $\psi_m(\varphi) = \cos \frac{1}{2} m\varphi$ при $(-1)^m > 0$, $\psi_m(\varphi) = \sin \frac{1}{2} (m+1)\varphi$ при $(-1)^m < 0$, $\psi_{-1}(\varphi) = 1$.

Если подставить выражения (6) в функционалы (2), (3) и использовать необходимые условия стационарности этих функционалов, то задачу нахождения оптимальных температурных полей можно свести к решению систем алгебраических уравнений вида

$$\begin{pmatrix} K^m & R^m \\ R^{m*} & Q^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g^m \\ t^m \end{pmatrix} = 0, \quad m = \overline{1, M}. \quad (7)$$

Здесь $g^m = (g_{m0}^*, g_{m1}^*, \dots, g_{mk}^*)^*$; $t^m = (t_{m1}^*, t_{m2}^*, \dots, t_{mk}^*)^*$; R^m — ленточная матрица с элементами $r_{ij}^m = \sum_{n=1}^k r_{ij}^{mn}$; K^m, Q^m — ленточные симметричные матрицы с элементами $k_{ij}^m = \sum_{n=1}^k k_{ij}^{mn}$ и $q_{ij}^m = \sum_{n=1}^k q_{ij}^{mn}$ соответственно; ненулевые элементы $k_{ij}^{mn}, q_{ij}^{mn}, r_{ij}^{mn}$ вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} k_{11}^{mn} &= -k_{15}^{mn} = k_{55}^{mn} = D_0 \left(\frac{R}{L_n b (1 - \nu^2)} + \frac{L_n b m}{3R(1 + \nu)} \right); & -k_{12}^{mn} &= k_{16}^{mn} = \\ &= k_{25}^{mn} = \frac{D_0 m}{2} \left(\frac{\nu}{1 - \nu^2} + \frac{1}{1 + \nu} \right); & -k_{13}^{mn} &= -k_{17}^{mn} = k_{35}^{mn} = k_{57}^{mn} = \\ &= \frac{D_0 \nu}{2(1 - \nu^2)}; & -k_{14}^{mn} &= k_{18}^{mn} = k_{45}^{mn} = -k_{58}^{mn} = \frac{D_0 L_n \nu}{12(1 - \nu^2)}; & k_{22}^{mn} &= k_{66}^{mn} = \\ &= D_0 \left(\frac{R}{L_n b (1 + \nu)} + \frac{L_n b m^2}{3R(1 - \nu^2)} \right); & k_{24}^{mn} &= -k_{68}^{mn} = \frac{0,05 D_0 L_n^2 b m}{R(1 - \nu^2)} + \\ &+ D_1 \left(\frac{\nu m}{R b} + \frac{0,05 L_n^2 b m^3}{R^3} \right); & k_{26}^{mn} &= D_0 \left(\frac{L_n b m^2}{6R(1 - \nu^2)} - \frac{R}{L_n b m^2 (1 + \nu)} \right) + \\ &+ D_1 \left(\frac{L_n b m^2}{6R^3} - \frac{2(1 - \nu)}{R L_n b} \right); & k_{27}^{mn} &= k_{36}^{mn} = \frac{0,15 D_0 L_n b m}{R(1 - \nu^2)} + D_1 \left(\frac{0,15 L_n b m^3}{R^3} + \right. \\ &+ \left. \frac{m(\nu - 2)}{R L_n b} \right); & k_{28}^{mn} &= -k_{45}^{mn} = \frac{D_0 L_n b m}{30R(1 - \nu^2)} + \frac{D_1 L_n^2 b m^3}{30R^3}; & k_{33}^{mn} &= k_{77}^{mn} = \\ &= \frac{13 D_0 L_n b}{35R(1 - \nu^2)} + D_1 \left(\frac{13 L_n b m^4}{210 R^3} + \frac{12R}{L_n^3 b^3} + \frac{2,4 m^2}{R L_n b} \right); & k_{34}^{mn} &= -k_{78}^{mn} = \\ &= \frac{11 D_0 L_n^2 b}{210 R (1 - \nu^2)} + D_1 \left(\frac{11 L_n b m^4}{210 R^3} + \frac{6R}{L_n^2 b^3} + \frac{m^2}{R L_n b} \right); & -k_{38}^{mn} &= k_{47}^{mn} = \\ &= \frac{13 D_0 L_n b}{420 R (1 - \nu^2)} + D_1 \left(\frac{13 L_n^2 b m^4}{420 R^3} - \frac{6R}{L_n^2 b^3} - \frac{0,2 m^2}{R b} \right); & k_{37}^{mn} &= \frac{9 D_0 L_n b}{70 R (1 - \nu^2)} + \\ &+ D_1 \left(\frac{9 L_n b m^4}{70 R^3} - \frac{12R}{L_n^3 b^3} - \frac{2,4 m}{R L_n b} \right); & -k_{44}^{mn} &= k_{88}^{mn} = \frac{D_0 L_n^3 b}{105 R (1 - \nu^2)} + \\ &+ D_1 \left(\frac{L_n^3 b m^4}{105 R^3} + \frac{4R}{L_n b^3} + \frac{4 L_n m^2}{15 R b} \right); & k_{48}^{mn} &= -\frac{D_0 L_n^3 b}{140 R (1 - \nu^2)} + \end{aligned}$$

$$+ D_1 \left(\frac{2R}{L_n b^3} - \frac{L_n^3 b m^4}{140 R^3} - \frac{L_n m^2}{30 R b} \right); \quad q_{11}^{mn} = q_{33}^{mn} = 2q_{13}^{mn} = \frac{q_{22}^{mn}}{3} =$$

$$= \frac{q_{44}^{mn}}{3} = \frac{2q_{24}^{mn}}{3} = \frac{2D_0 R b \alpha_l^2 L_n}{3(1-\nu)}; \quad -r_{11}^{mn} = -r_{13}^{mn} = r_{51}^{mn} = r_{53}^{mn} =$$

$$= \frac{D_0 R \alpha_l}{2(1-\nu)}; \quad r_{21}^{mn} = 2r_{23}^{mn} = 2r_{61}^{mn} = r_{63}^{mn} = \frac{D_0 L_n b \alpha_l m}{3(1-\nu)};$$

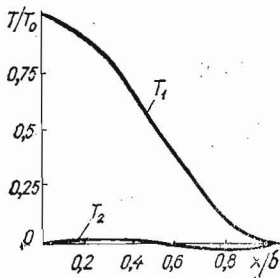


Рис. 1

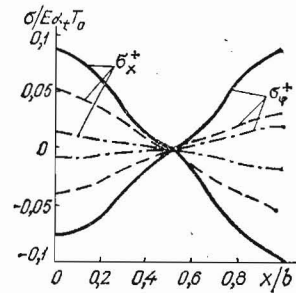


Рис. 2

$$r_{22}^{mn} = 2r_{24}^{mn} = 2r_{62}^{mn} = r_{64}^{mn} = \frac{D_1 L_n b \alpha_l m (1-\nu)}{3R h}; \quad \frac{r_{31}^{mn}}{7} = \frac{r_{33}^{mn}}{3} =$$

$$= \frac{r_{71}^{mn}}{3} = \frac{r_{73}^{mn}}{7} = \frac{D_0 L_n b \alpha_l}{20(1-\nu)}; \quad r_{44}^{mn} = r_{82}^{mn} = \frac{D_1 L_n^2 b m^2 \alpha_l (1+\nu)}{30R h};$$

$$r_{32}^{mn} = r_{74}^{mn} = \frac{D_1 \alpha_l (1+\nu)}{h} \left(\frac{R}{L_n b} + \frac{7L_n b m^2}{20R} \right); \quad r_{41}^{mn} = \frac{3}{2} r_{43}^{mn} = -\frac{3}{2} r_{81}^{mn} =$$

$$= r_{83}^{mn} = \frac{D_0 L_n b \alpha_l}{20(1-\nu)}; \quad r_{34}^{mn} = r_{72}^{mn} = \frac{D_1 \alpha_l (1+\nu)}{h} \left(\frac{R}{L_n b} + \frac{7L_n b m^2}{20R} \right);$$

$$r_{42}^{mn} = -r_{84}^{mn} = \frac{D_1 \alpha_l (1+\nu)}{h} \left(\frac{R}{b} + \frac{L_n^2 b m^2}{20R} \right).$$

Условия (1), (4) удовлетворяются непосредственно на этапе решения систем (7) методом Гаусса.

В качестве примера на рис. 1 показаны профили безразмерных характеристик T_1/T_0 , T_2/T_0 оптимального температурного поля, полученного при следующих условиях нагрева: $T_1(0, \varphi) = T_0$, $T_2(0, \varphi) = 0$, $T_1(b, \varphi) = 0$, $T_2(b, \varphi) = 0$. На рис. 2 приведены графики вызванных этим температурным полем осевых и кольцевых напряжений σ_x^+ , σ_φ^+ на внешней поверхности оболочки в зависимости от осевой координаты при $\nu = 0,215$, $h/R = 1/40$. Сплошные кривые соответствуют случаю $R/b = 2$, штриховые $-R/b = 1$, штрихпунктирные $-R/b = 1/2$.

1. Абовский Н. П., Андреев Н. П., Деруга А. П. Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек.— М.: Наука, 1978.— 288 с.
2. Григолюк Ф. И., Подстригач Я. С., Бурак Я. И. Оптимизация нагрева оболочек и пластин.— Киев: Наук. думка, 1979.— 364 с.
3. Подстригач Я. С., Швеиц Р. Н. Термоупругость тонких оболочек.— Киев: Наук. думка, 1978.— 344 с.
4. Савула Я. Г., Шинкаренко Г. А. Расчет криволинейных трубчатых оболочек полуаналитическим методом конечных элементов.— Изв. АН СССР. Сер. Механика твердого тела, 1980, № 2, с. 168—173.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
29.04.81