

где

$$I_3 = \frac{qK_{2m}(\beta_0)}{\lambda_1 \sigma_{ni}^2} \int_{-1}^1 P_{mn}(\mu) d\mu, \quad I_4 = \frac{qK_{2m-1}(\beta_0)}{\lambda_1 \sigma_{ni}^2} \int_{-1}^1 P_{mn}(\mu) d\mu.$$

Нетрудно решить задачу теплопроводности для тонких оболочек и при других граничных условиях на их контурах.

1. Владимиров В. С. Уравнения математической физики.— М.: Наука, 1976.— 528 с.
2. Гельфанд И. М., Шиллов Г. Э. Обобщенные функции.— М.: Физматгиз, 1958.— Вып. 1.— 440 с.
3. Подстригач Я. С., Швец Р. Н. Термоупругость тонких оболочек.— Киев: Наук. думка, 1978.— 344 с.
4. Хапко Б. С., Заболотный В. П. Тепловые напряжения в сферической оболочке, обусловленные источником тепла в форме линии.— В кн.: Обобщенные функции в термоупругости. Киев.: Наук. думка, 1980, с. 198—202.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
14.01.82

УДК 536.12:519.6

В. М. Вигах, В. Л. Фальковский

РЕШЕНИЕ ГРАНИЧНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ПРОСТЫХ ТЕЛ

Обратные некорректные задачи теплопроводности возникают в первую очередь при исследовании реальных температурных полей [2, 3, 5] и в задачах оптимизации [1]. Решение таких задач можно построить с помощью метода регуляризации [6]. В данной работе для решения обратной некорректной граничной задачи теплопроводности предложен один метод регуляризации, который позволяет, например, для одномерного случая аналитическим методом построить устойчивое решение.

Для простоты рассмотрим одномерную задачу теплопроводности

$$\Delta T = \frac{\partial T}{\partial \tau}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{j}{x} \frac{\partial}{\partial x} \quad (j = 0, 1, 2),$$
$$x \in (k, 1), \quad k \in [0, 1), \quad \tau \in (0, \infty); \quad (1)$$

$$\frac{\partial T(k, \tau)}{\partial x} - H [T(k, \tau) - t(\tau)] = 0, \quad (2)$$

$$T(a, \tau) = \varphi(\tau), \quad a \in [k, 1], \quad (3)$$

$$T(x, 0) = f(x), \quad x \in [k, 1], \quad (4)$$

где x, τ, H — безразмерные координата, время и коэффициент теплообмена [1]; $t(\tau), \varphi(\tau), f(x)$ — известные функции. Требуется построить устойчивое решение задачи (1) — (4) для $x \in [k, 1]$. Нетрудно видеть, что для $x \in [k, a]$ задача (1) — (4) корректна, откуда непосредственно можно найти

$$\frac{\partial T(a, \tau)}{\partial x} = \psi(\tau). \quad (5)$$

Таким образом, для определения функции $T(x, \tau)$ при $x \in [k, 1]$ осталось из решения уравнения (1) при краевых условиях (3) — (5) найти ее для $x \in [a, 1]$. Однако задача теплопроводности (1), (3) — (5) является некорректной и для $x \in [a, 1]$ решения не существует.

С целью регуляризации решения некорректной задачи теплопроводности (1), (3) — (5) для $x \in [a, 1]$ заменим условие (3) несколько видоизмененным

$$T(a, \tau) + \varepsilon [T(1, \tau) - f(1)] = \varphi(\tau), \quad |\varepsilon| < 1, \quad (6)$$

где ε — параметр регуляризации; наличие величины $f(1)$ обусловлено согласованием условия (6) с начальным (4) при $\varepsilon \neq 0$ и является необходимым для обеспечения непрерывности функции $T(x, \tau)$.

Можно убедиться, что решение задачи (1), (4) — (6) при $\varepsilon \neq 0$ существует и единственно [4]. Обозначим его через $T_\varepsilon(x, \tau)$. Сравнив задачу (1), (3) — (5) с полученной задачей (1), (4) — (6), следует ожидать, что

$$T(x, \tau) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_\varepsilon(x, \tau).$$

Вместо условия (6) можно использовать другие, например:

$$T(a, \tau) + \varepsilon \left[\frac{\partial T(1, \tau)}{\partial x} - \frac{df(1)}{dx} \right] = \varphi(\tau) \quad (7)$$

или

$$T(a, \tau) + \varepsilon [T_*(\tau) - f_*] = \varphi(\tau),$$

$$T_*(\tau) = \frac{1+j}{1-a^{j+1}} \int_a^1 x^j T(x, \tau) dx,$$

$$f_* = \frac{1+j}{1-a^{j+1}} \int_a^1 x^j f(x) dx \quad (j = 0, 1, 2), \quad (8)$$

которые также позволяют найти решение $T_\varepsilon(x, \tau)$ для $x \in [a, 1]$.

Выше с целью регуляризации решения некорректной задачи теплопроводности (1), (3) — (5) несколько видоизменялось условие (3). Аналогично для регуляризации решения этой задачи можно поступить с условием (5), заменив его следующим:

$$\frac{\partial T(a, \tau)}{\partial x} + \varepsilon [T(1, \tau) - f(1)] = \psi(\tau) \quad (9)$$

либо

$$\frac{\partial T(a, \tau)}{\partial x} + \varepsilon \left[\frac{\partial T(1, \tau)}{\partial x} - \frac{df(1)}{dx} \right] = \psi(\tau), \quad (10)$$

либо

$$\frac{\partial T(a, \tau)}{\partial x} + \varepsilon [T_*(\tau) - f_*] = \psi(\tau). \quad (11)$$

Последнее свидетельствует, что из неоднозначности способа регуляризации следует неоднозначность решения $T_\varepsilon(x, \tau)$. Регуляризируемое таким методом решение задачи (1), (3) — (5) для $x \in [a, 1]$ можно представить в виде

$$T_\varepsilon(x, \tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^\tau [\varphi(\tau - \eta) T_1(x, \eta) + \psi(\tau - \eta) T_2(x, \eta)] d\eta + \int_a^1 \xi^j f(\xi) \times \\ \times T_3(x, \xi, \tau) d\xi \quad (j = 0, 1, 2), \quad (12)$$

где вид функций влияния $T_i(x, \tau)$ ($i = 1, 2$), $T_3(x, \xi, \tau)$ зависит от выбора условия регуляризации (6) — (11).

Одним из основных вопросов, возникающих при построении регуляризованного решения $T_\varepsilon(x, \tau)$, является устойчивость его в зависимости от параметра ε , которая непосредственно зависит от поведения корней (собственных значений) характеристического уравнения полученной краевой задачи. Например, в случае $j = 0$ для задач теплопроводности (1), (4) — (6) и (1), (4), (5), (10) характеристическое уравнение имеет вид

$$\operatorname{ch} \mu = -\frac{1}{\varepsilon}, \quad (13)$$

для задачи (1), (4), (5), (7) —

$$\operatorname{sh} \mu = -\frac{1}{\varepsilon \mu}, \quad (14)$$

для задач (1), (4), (5), (8) и (1), (4), (5), (9) —

$$\operatorname{sh} \mu = -\frac{\mu}{\varepsilon}, \quad (15)$$

для задачи (1), (4), (5), (11) —

$$\operatorname{ch} \mu = \frac{\varepsilon - \mu^2}{\varepsilon}. \quad (16)$$

Здесь при выводе характеристических уравнений (13) — (16) без ограничения общности принято $a = 0$.

Уравнения (13) — (16) имеют счетное множество комплексных корней $\mu_n = \alpha_n \pm i\beta_n$ ($\alpha_n, \beta_n \geq 0$; $n = 1, 2, \dots$). Решение $T_\varepsilon(x, \tau)$ будет неустойчивым, если хотя бы в одном из корней $\alpha_n > \beta_n$. В перечисленных выше задачах регуляризации устойчивость решения зависит от первого корня μ_1 .

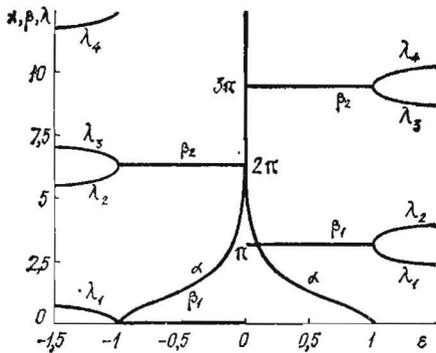


Рис. 1

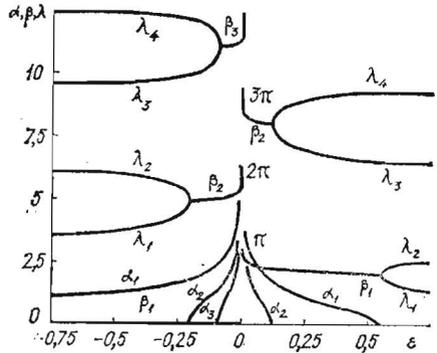


Рис. 2

На рис. 1 представлены корни уравнения (13) в зависимости от величины параметра регуляризации ε . Для $|\varepsilon| < 1$ (естественно, нас интересуют лишь такие значения параметра) уравнение имеет только комплексные корни $\mu_n = \alpha \pm i\beta_n$, где при $\varepsilon \in (0, 1)$

$$\alpha = \ln \left[\frac{1}{\varepsilon} (1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2}) \right], \quad \beta_n = (2n - 1) \pi,$$

а при $\varepsilon \in (-1, 0)$

$$\alpha = \ln \left[-\frac{1}{\varepsilon} (1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2}) \right], \quad \beta_n = (2n - 2) \pi.$$

Поскольку действительная часть первого корня $\alpha \leq \pi$ лишь для значений $\varepsilon \geq \varepsilon_1$, где $\varepsilon_1 = \frac{2 \exp \pi}{1 + \exp 2\pi}$, то решения $T_\varepsilon(x, \tau)$ для регуляризованных задач теплопроводности (1), (4) — (6) и (1), (4), (5), (10) устойчивы на промежутке $[\varepsilon_1, 1)$. Устойчивы также эти решения для $\varepsilon \geq 1$, где корни уравнения чисто мнимые $\mu_n = i\lambda_n$ ($n = 1, 2, \dots$). Однако из-за больших отклонений регуляризованных условий (6), (10) от исходных (3), (5) упомянутые решения для нас мало пригодны.

Уравнение (14) (рис. 2) при $|\varepsilon| < 1$ имеет комплексные и чисто мнимые корни. При этом для $\varepsilon > 0,549$ решение имеет экспоненциальный спокойный характер, так как все корни (14) мнимые $\mu_n = i\lambda_n$ ($n = 1, 2, \dots$), для $\varepsilon < 0,549$ корни комплексные, причем при $\varepsilon \in (0,05; 0,549)$ $\alpha_1 \leq \beta_1$ и решение устойчиво. В обоих рассмотренных случаях для $\varepsilon \in (-1, 0)$ решение неустойчиво из-за наличия действительного корня $\mu_1 = \alpha_1 > 0$. Необходимо отметить, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ действительная часть корней $\alpha_n \rightarrow \infty$, откуда следует отсутствие решения задачи (1) — (4). Аналогично можно найти область устойчивого решения и для других способов регуляризации. Например, для уравнения (15) действительная часть первого корня $\alpha_1 < \beta_1$ при величине $\varepsilon > 0,22$.

Наконец, следует отметить, что при реализации предлагаемого метода регуляризации обратной задачи теплопроводности (1), (3) — (5) величину параметра ε следует выбирать минимальной из области устойчивого решения, тогда отклонение регуляризуемого условия от исходного также будет минимальным. Однако по мере уменьшения параметра регуляризации ε амплитуда колебаний искомой температуры в зависимости от времени в других точках,

например $x = 1$, будет резко увеличиваться. Поэтому заранее необходимо предусмотреть удовлетворение исходных граничных условий (3) или (5) с определенной точностью. Тогда параметр ε можно будет выбирать исходя из реальных требований точности удовлетворения этим граничным условиям.

В качестве примера рассмотрим задачу оптимизации для пластины, которая сводится к задаче теплопроводности (1) — (4) ($j = 0$). Требуется с помощью двухстороннего конвективного симметричного нагрева пластины толщиной $2h$

$$\frac{\partial T(1, \tau)}{\partial x} + H [T(1, \tau) - t_1(\tau)] = 0,$$

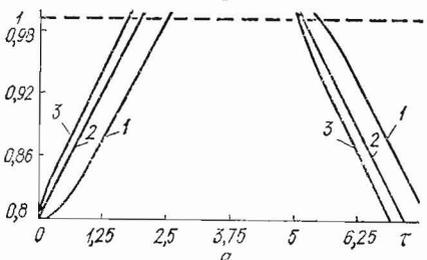
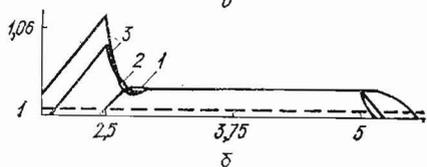
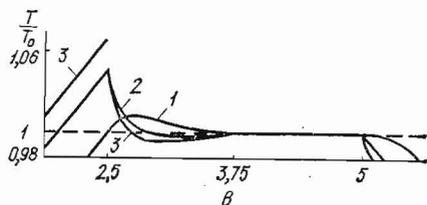


Рис. 3

где $t_1(\tau)$ — искомая температура греющей среды (управление), с безразмерным коэффициентом теплообмена $H = 4$ при ограничении на относительную скорость нагрева

$$\left| \frac{\partial T(1, \tau)}{\partial x} \right| = \left| \frac{\partial T(-1, \tau)}{\partial x} \right| \leq \omega$$

за минимальное время τ_1 нагреть пластину из начального состояния $f(x) = 0,8 T_0$ до температуры $T(0, \tau_1) = T_0$ при $\omega = 10^\circ \text{C}$ и на промежутке времени $\tau_0 = \tau_2 - \tau_1 = 2,5$ обеспечить выдержку температуры необогреваемой поверхности (3) ($a = 0$) при условии $\varphi(\tau) = T_0 = \text{const}$, а затем наискорейшим путем охладить ее до состояния $T(1, \tau_3) = T(-1, \tau_3) = 0$. Здесь $\omega = \omega^* \frac{h^2}{a^*}$; ω^* — скорость нагрева; a^* — коэффициент температуропроводности.

На рис. 3 для этой задачи показаны температура необогреваемой поверхности $T_\varepsilon(0, \tau)$ (кривая 1), температура обогреваемой поверхности $T_\varepsilon(1, \tau)$ (кривая 2) и построено управление $t_1(\tau)$ (кривая 3) с помощью решения (9), (12) (рис. 3, б) и с помощью решения (10), (12) без согласования граничных условий с начальным, которое здесь необязательно (рис. 3, в). На рис. 3, а показаны аналогичные в обоих случаях решения для этапов нагрева и охлаждения. Решение (12) при больших τ дает асимптотическое приближение регулируемой температуры для условия (9) к величине $\frac{T_0 + \varepsilon T(1, \tau_1)}{1 + \varepsilon}$, а для условия (10) (без согласования) — к величине T_0 .

Как показывают приведенные расчеты, применение решения (12) при условии (10), например, для параметра регуляризации $\varepsilon = 0,5$ позволяет выдерживать заданную температуру теплоизолированной поверхности пластины в спокойном режиме (без заметных колебаний) с точностью 1,5 %.

1. Визак В. М. Оптимальное управление нестационарными температурными режимами. — Киев : Наук. думка, 1979. — 360 с.
2. Коздоба Л. А. Решение нелинейных задач теплопроводности. — Киев : Наук. думка, 1976. — 136 с.
3. Мацевитый Ю. М., Прокофьев В. Е., Широков В. С. Решение обратных задач теплопроводности на электрических моделях. — Киев : Наук. думка, 1980. — 132 с.
4. Расулов М. Л. Применение метода контурного интеграла к решению задач для параболических систем второго порядка. — М. : Наука, 1975. — 255 с.
5. Темкин А. Г. Обратные методы теплопроводности. — М. ; Л. : Энергия, 1973. — 302 с.
6. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. — М. : Наука, 1979. — 285 с.