1. *Кит Г. С. Хай М. В.* Интегральные уравнения пространственных задач теплопроводности для тел с трещинами.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1975, № 8, с. 704—707.
2. *Кит Г. С., Хай М. В.* Интегральные уравнения пространственных задач термоупругости для тел с трещинами.— Там же, № 12, с. 1108—1112.
3. *Лаушник И. П., Хай М. В.* Трехмерная задача термоупругости для тела с периодической системой дискообразных трещин.— Прикл. механика, 1980, 15, № 4, с. 29—34.
4. *Хай М. В.* Интегральные уравнения периодических задач термоупругости для бесконечного тела с дискообразными трещинами.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1978, № 1, с. 46—50.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
20.11.81

УДК 517.985

А. А. Панков

О МЕТОДЕ КВАЗИОБРАЩЕНИЯ В ЗАДАЧАХ ТЕРМОУПРУГОСТИ

Обсудим возможности метода квазиобращения [6] при решении задач с обратным временем для уравнений термоупругости с использованием абстрактного подхода и результатов [1]. Общее обсуждение проблем термоупругости приведено, например, в работах [3, 8], а граничных задач для уравнений термоупругости с классической точки зрения — в обзоре [5].

Задача Коши. Рассмотрим систему уравнений термоупругости ($x \in \mathbb{R}^n$, $t \in (0, T)$)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a_1 \Delta u - (a_1 + b)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\, u + \alpha\,\mathrm{grad}\, v = f_1, \qquad \frac{dv}{\partial t} - a_2 \Delta v + \beta\,\mathrm{div}\,\frac{\partial u}{\partial t} = f_2. \tag{1}$$

Здесь $u = (u_1, \ldots, u_n)$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$. В приложениях $n \leqslant 3$. Введем обозначения: $H_1 = [L^2(\mathbb{R}^n)]^n$, $V_1 = [H^1(\mathbb{R}^n)]^n$, $H_2 = L^2(\mathbb{R}^n)$, $V_2 = H^1(\mathbb{R}^n)$ (см. [7]). В этой ситуации $V_1' = [H^{-1}(\mathbb{R}^n)]^n$, $V_2' = H^{-1}(\mathbb{R}^n)$ (здесь штрих обозначает антидвойственное пространство). Для уравнений (1) рассмотрим задачу Коши

$$u(0) = u_0 \in V_1, \quad \frac{du}{dt}(0) = u_1 \in H_1, \quad v(0) = v_0 \in H_2. \tag{2}$$

В операторной форме система (1) записывается в виде

$$\frac{d^2u}{dt^2} + A_1 u + B_1 v = f_1, \qquad \frac{dv}{dt} + A_2 v + B_2 \frac{du}{dt} = f_2. \tag{3}$$

Предполагаем выполненным условие

$$\mathrm{Re}\,(A_1 u, u) \geqslant c_1 \|u\|^2_{V_1} + c\|u\|^2_{H_1}, \quad u \in V_1, \tag{4}$$

где $c_1 > 0$, $c \in \mathbb{R}$. При $n = 3$ это условие выполнено, если $3a_1 + 2b > 0$. (Обычно в теории термоупругости считают, что $\alpha/\beta > 0$; это условие в дальнейшем не предполагается). Из результатов [1] вытекает такое утверждение.

Предложение 1. Пусть $f_1 \in L^2(0, T; H_1)$ и $f_2 \in L^2(0, T; V_2')$. Тогда задача (1), (2) имеет единственное решение такое, что $u \in L^2(0, T; V_1)$, $u' \in L^2(0, T; H_1)$, $v \in L^2(0, T; V_2) \cap C([0, T]; H_2)$.

В этой ситуации на самом деле справедливо включение $u \in C([0, T]; V_1)$, $u' \in C([0, T]; H_1)$.

Обратная задача Коши. Для системы (1) рассмотрим обратную задачу Коши

$$u(T) = \xi_0 \in V_1, \quad \frac{du}{dt}(T) = \xi_1 \in H_1, \quad v(T) = \eta \in H_2. \tag{5}$$

При этом можно считать, что $f_1 = 0$, $f_2 = 0$* (изменяя, если необходимо, (ξ_0, ξ_1, η)). Задача (1), (5) некорректна в классе функций, описанном в предложении 1. Поэтому имеет смысл следующая задача: построить решение $(u^{(\varepsilon)}, v^{(\varepsilon)})$, $\varepsilon > 0$ уравнений (1) такое, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(u^{(\varepsilon)}(T),\ \frac{du^{(\varepsilon)}}{dt}(T),\ v^{(\varepsilon)}(T)\right) = (\xi_0,\ \xi_1,\ \eta), \tag{6}$$

где предел берется в пространстве $\overline{H} = V_1 \times H_1 \times H_2$. Для этого достаточно построить такие начальные условия $(u_{0\varepsilon}, u_{1\varepsilon}, v_{0\varepsilon})$, что соответствующее решение задачи Коши (1), (2) обладает свойствами (6).

Квазиобращение. Запишем систему (1) в виде абстрактного уравнения в гильбертовом пространстве $\overline{H}$:

$$\frac{dU}{dt} + AU = 0. \tag{7}$$

Здесь $U = (u, w, v)$, а оператор A задан формулой

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -I & 0 \\ A_1 & 0 & B_1 \\ 0 & B_2 & A_2 \end{pmatrix}.$$

В силу предложения 1 уравнение (7) порождает сильно непрерывную полугруппу операторов в $\overline{H}$ [4]. В качестве уравнения квазиобращения рассмотрим систему

$$\frac{dU_\varepsilon}{dt} + AU_\varepsilon + \varepsilon CU_\varepsilon = 0, \tag{8}$$

где оператор C имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} -\Delta^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\Delta^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\Delta^2 \end{pmatrix}$$

и $U_\varepsilon = (u_\varepsilon, w_\varepsilon, v_\varepsilon)$. Оператор A, рассматриваемый как неограниченный оператор в $\overline{H}$, вполне подчинен в смысле [4] оператору C (в качестве области определения $D(C)$ которого берется пространство $[H^5(\mathbb{R}^n)]^n \times [H^4(\mathbb{R}^n)]^n \times H^4(\mathbb{R}^n)$). Уравнение

$$\frac{dW}{dt} + \varepsilon CW = 0 \tag{9}$$

в обратном времени является абстрактным параболическим и порождает аналитическую полугруппу операторов в $\overline{H}$. Поэтому уравнение (8) также является абстрактным параболическим [4]. Следовательно, для уравнения (8) корректна обратная задача Коши с данными $U_\varepsilon(T) = (\xi_0, \xi_1, \eta)$.

Метод квазиобращения предписывает теперь решить задачу (1), (2), где $(u_0, u_1, v_0) = U_\varepsilon(0)$. Обозначим это решение через $(u^{(\varepsilon)}, v^{(\varepsilon)})$. (Оно существует в силу предложения 1). Справедливо такое утверждение.

Предложение 2. Для построенного решения $(u^{(\varepsilon)}, v^{(\varepsilon)})$ справедливо соотношение (6), где предел понимается в топологии пространства $\overline{H}$.

Доказательство основано на том, что полугруппы, порожденные уравнениями (8), (9) (с обратным направлением времени), коммутируют [6].

Полезно записать уравнение (8) в виде системы двух уравнений

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial t^2} - 2\varepsilon\Delta^2\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - a_1\Delta u_\varepsilon - (a_1 + b)\operatorname{grad}\operatorname{div} u_\varepsilon + \varepsilon^2\Delta^4 u_\varepsilon + \alpha\operatorname{grad} v_\varepsilon = 0, \\ \frac{\partial v_\varepsilon}{dt} - a_2\Delta v_\varepsilon - \varepsilon\Delta^2 v_\varepsilon + \beta\operatorname{div}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} = 0. \end{gathered} \tag{10}$$

* В дальнейшем это предполагается выполненным.

Решая обратную задачу Коши для системы (10) с данными

$$u_\varepsilon(T) = \xi_0, \quad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(T) = \xi, \quad v_\varepsilon(T) = \eta,$$

полагаем, что $u^{(\varepsilon)}(0) = u_\varepsilon(0)$, $\frac{\partial u^{(\varepsilon)}}{\partial t}(0) = \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(0)$, $v^{(\varepsilon)}(0) = v_\varepsilon(0)$, и решаем прямую задачу Коши для уравнений (1). Для полученных решений будет выполняться предельное соотношение (6).

Задача квазиобращения (8) (или (10)) чрезвычайно сложна. Естественно заменить систему (10) следующей:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial t^2} - a_1 \Delta u_\varepsilon - (a_1 + b)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\, u_\varepsilon + \alpha\,\mathrm{grad}\, v_\varepsilon = 0, \\ &\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t} - a_1 \Delta v_\varepsilon - \varepsilon \Delta^2 v_\varepsilon + \beta\,\mathrm{div}\,\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Разрешимость этой системы при начальных данных типа (5) гарантируется результатами [1]. При численной реализации система (11) существенно проще, чем система (10). Однако в этой ситуации не удается доказать равенство (6).

Приведенная выше конструкция в равной степени применима к случаю смешанной задачи (с однородными данными Дирихле) в ограниченной области пространства $\mathbb{R}^n$. В этом случае следует положить

$$H_1 = [L^2(\Omega)]^n, \quad V_1 = [H_0^1(\Omega)]^n,$$
$$H_2 = L^2(\Omega), \quad V_2 = H_0^1(\Omega).$$

Для уравнения теплопроводности в работе [2] получены важные результаты о сходимости метода квазиобращения в равномерной метрике.

1. *Боценюк А. Н., Панков А. А.* О некоторых сцепленных системах абстрактных дифференциальных уравнений типа уравнений термоупругости.— Докл. АН УССР, 1983, № 10, с. 6—8.
2. *Иванов В. К.* Задача квазиобращения для уравнений теплопроводности в равномерной метрике.— Дифференц. уравнения, 1972, 8, № 4, с. 652—658.
3. *Коваленко А. Д.* Основы термоупругости.— Киев : Наук. думка, 1970.— 307 с.
4. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве.— М. : Наука, 1976.— 464 с.
5. *Купрадзе В. Д., Бурчуладзе Т. В.* Динамические задачи теории упругости и термоупругости.— Соврем. пробл. математики, 1975, 7, с. 163—294.
6. *Латтес Р., Лионс Ж. Л.* Метод квазиобращения и его приложения.— М. : Мир. 1970.— 336 с.
7. *Лионс Ж. Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения.— М. : Мир, 1971.— 371 с.
8. *Термоупругость* электропроводных тел / Я. С. Подстригач, Я. Н. Бурак, А. Р. Гачкевич, Л. В. Чернявская.— Киев : Наук. думка, 1977.— 277 с.

Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию 15.10.81

УДК 539.377

Р. Н. Швец, Б. С. Хапко

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК С ИСТОЧНИКАМИ ТЕПЛА, РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПО ПРОИЗВОЛЬНОЙ КРИВОЙ

Проблема нахождения температурных полей в тонких оболочках с источниками тепла, распределенными по произвольной кривой, имеет важное прикладное значение. Теоретически она может быть решена с помощью метода функций Грина. Однако математические трудности, возникающие при этом, зачастую становятся непреодолимыми. В настоящей работе предложено подход к решению краевых задач для оболочек, когда источники тепла произвольно распределены по кривой, которая может не совпадать с координатными линиями.