

щине цилиндра и различных частотах. С увеличением частоты глубина проникновения уменьшается.

Вычислениями показано, что при  $\frac{b-a}{\delta} \ll 0,5$  и  $\frac{b-a}{\delta} \gg 1,2$  погрешность вычислений методом подвижной границы с помощью решений (8), (9) не превышает 1%. При  $\frac{b-a}{\delta} \sim 1$  погрешность возрастает до 9% и при решении задачи необходимо пользоваться системой (10).

1. Говорков В. А. Электрические и магнитные поля.— М.; Л.: Госэнергоиздат, 1969.—463 с.
2. Нейман Л. Р. Поверхностный эффект в ферромагнитных телах.— М.; Л.: Госэнергоиздат, 1949.—190 с.
3. Результаты расчетов электромагнитных полей в ферромагнитных цилиндрах с учетом гистерезиса / Е. М. Иванов, Е. И. Петрушенко, М. В. Пийтер, В. Е. Пухова — Изв. вузов. Электромеханика, 1974, № 1.

Киевский университет

Поступила в редколлегию  
20.11.81

УДК 538.30

М. Т. Солодяк

#### РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В ФЕРРОМАГНИТНОМ СЛОЕ ПРИ ИНДУКЦИОННОМ НАГРЕВЕ

Рассмотрим упругий электропроводный слой из магнитомягкого материала, находящийся под воздействием электрических токов постоянной амплитуды  $\vec{J}^{(0)} = \{j_0 \delta(z+z_0) \cos \omega t, 0, 0\}$  (рис. 1), где  $\omega$  — частота;  $t$  — время;  $\delta(z)$  — дельта-функция Дирака. Определим периодические составляющие напряженности магнитного и электрического полей, а также магнитную индукцию в области слоя. Характеристики материала считаем постоянными. Зависимость между отличными от нуля составляющими индукции  $B_y = B(z, t)$  и напряженности  $H_y = H(z, t)$  магнитного поля выбираем в виде [3]

$$b = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \arctg \sqrt{\epsilon} h, \quad (1)$$

что учитывает возможность насыщения магнитной индукции. Здесь  $h = \frac{H}{I_0}$ ;  $b = \frac{B}{\mu \mu_0 I_0}$ ;  $t = \omega t$ ;  $\epsilon = \left( \frac{\pi \mu \mu_0 j_0}{2 B_s} \right)^2$  — параметр нелинейности;  $\mu_0$  — магнитная постоянная;  $\mu$  — начальная относительная магнитная проницаемость материала;  $B_s$  — индукция насыщения. Зависимость (1) записана в пренебрежении линейным членом  $\frac{\mu_0}{\mu} h$ , который является малым для величин напряженностей, используемых при индукционном нагреве установившихся электромагнитных полей.

На основании уравнений электродинамики в пренебрежении токами смещения в области слоя [4] для определения функции  $h(z, t)$  получим уравнение

$$(1 + \epsilon h^2) \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 2\gamma^2 \frac{\partial h}{\partial t} \quad (2)$$

при граничных условиях [5]

$$\begin{aligned} -m_0 \frac{\partial h(0, t)}{\partial z} + h(0, t) &= \cos t, \\ m_0 \frac{\partial h(1, t)}{\partial z} + h(1, t) &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\gamma^2 = \frac{1}{2} \sigma \mu \mu_0 \omega l^2$ ;  $m_0 = \frac{1}{\sigma l} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}$ ;  $z = \frac{z}{l}$ ;  $\epsilon_0$  — диэлектрическая постоянная;  $l$  — толщина слоя. Отметим, что для применяемых обычно в элементах

металлических конструкций ферромагнитных материалов и реальных толщин ( $l \geq 10^{-4}$  м) параметр  $m_0 \ll 1$  ( $m_0 \leq 2 \cdot 10^{-5}$ ). Периодическое решение уравнения (2) при граничных условиях (3) для  $\varepsilon = 0$  запишется так:

$$h(z, t) = u(z) e^{it} + u(z)^* e^{-it}, \quad (4)$$

где

$$u(z) = \frac{\alpha}{2} [\mu_1 e^{-(1+i)\gamma(1-z)} - \mu_2 e^{(1+i)\gamma(1-z)}];$$

$$\alpha = [\mu_1^2 e^{-(1+i)\gamma} - \mu_2^2 e^{(1+i)\gamma}]^{-1}; \quad \mu_1 = 1 - m(1+i);$$

$$\mu_2 = 1 + m(1+i); \quad m = m_0 \gamma.$$

Здесь и в дальнейшем звездочкой обозначены комплексно-сопряженные величины. Следуя работам [4, 5], периодическое решение задачи (2), (3) при отличном от нуля  $\varepsilon$  находим в виде (4), причем

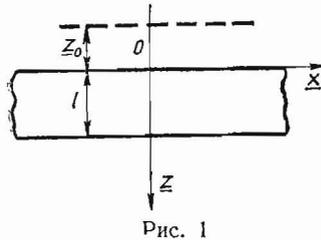


Рис. 1

$$u(z) = \frac{\alpha_k}{2} [\mu_1 e^{-(1+i)\gamma k(1-z)} - \mu_2 e^{(1+i)\gamma k(1-z)}], \quad (5)$$

$$\alpha_k = [\mu_1^2 e^{-(1+i)\gamma k} - \mu_2^2 e^{(1+i)\gamma k}]^{-1},$$

где  $k$  определяется из соотношения, полученного умножением уравнения (2) на  $\frac{\partial h}{\partial t}$ , с последующим интегрированием по толщинной координате  $z$  и времени  $t$ . Тогда

$$k = [1 + \varepsilon \Phi(\gamma, k)]^{-\frac{1}{2}}. \quad (6)$$

Здесь

$$\Phi(\gamma, k) = \frac{\int_0^1 (uu^*)^2 dz}{\int_0^1 uu^* dz} = \frac{\Phi_2}{16\Phi_0\Phi_1}, \quad (7)$$

где

$$\Phi_0 = (1 + 8m^2 + 4m^4) \operatorname{ch} 2\gamma \cdot k + 4m(1 + 2m^2) \operatorname{sh} 2\gamma \cdot k -$$

$$- (1 - 8m^2 + 4m^4) \cos 2\gamma \cdot k + 4m(1 - 2m^2) \sin 2\gamma \cdot k;$$

$$\Phi_1 = (1 + 2m^2) \operatorname{sh} 2\gamma \cdot k + 2m \operatorname{ch} 2\gamma \cdot k - (1 - 2m^2) \sin 2\gamma \cdot k - 2m \cos 2\gamma \cdot k,$$

$$\Phi_2 = (1 + 8m^2 + 4m^4) \operatorname{sh} 4\gamma \cdot k + 4m(1 + 2m^2) \operatorname{ch} 4\gamma \cdot k +$$

$$+ (1 - 8m^2 + 4m^4) \sin 4\gamma \cdot k + 4m(1 - 2m^2) \cos 4\gamma \cdot k -$$

$$- 4[(1 + 4m^2 - 4m^4) \operatorname{sh} 2\gamma \cdot k + 4m \operatorname{ch} 2\gamma \cdot k] \cos 2\gamma \cdot k -$$

$$- 4[(1 - 4m^2 - 4m^4) \operatorname{sh} 2\gamma \cdot k - 8m^3 \operatorname{ch} 2\gamma \cdot k] \sin 2\gamma \cdot k + 8(1 + 4m^4) \gamma k.$$

При  $\gamma k \geq 6$  формулы (5) — (7) с погрешностью меньше 1 % запишутся так:

$$u(z) = \frac{1}{2\mu_2} e^{-(1+i)\gamma kz}, \quad \Phi(\gamma, k) = \frac{1}{8(1+2m)}, \quad k = \left[1 + \frac{\varepsilon}{8(1+2m)}\right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (9)$$

Аналогично при  $\gamma k \leq 0,3$  с той же погрешностью получим

$$u(z) = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{m_0}{k} - \left(1 - \frac{2m_0}{k}\right) z\right], \quad \Phi(\gamma, k) = \frac{3}{20} \left(1 - \frac{m_0}{k}\right),$$

$$k = \frac{\sqrt{1 + \frac{3\varepsilon}{20} + \frac{3\varepsilon}{20} m_0}}{1 + \frac{3\varepsilon}{20}}.$$

Выражение для напряженности электрического поля  $e = -\frac{\partial h}{\partial z}$  в соответствии с представлением (4) для функции  $h$  примет вид

$$e(z, t) = v(z) e^{it} + \dot{v}(z) e^{-it}, \quad (10)$$

где  $e = \frac{E}{E_0}$ ;  $E_0 = \frac{j_0}{\sigma l}$ ;  $v(z) = -\frac{\partial u}{\partial z}$ . С учетом формулы (5) найдем

$$v(z) = \frac{1}{2} (1+i) \gamma k a_k [\mu_1 e^{-(1+i)\gamma k(1-z)} + \mu_2 e^{(1+i)\gamma k(1-z)}]. \quad (11)$$

При  $\gamma k \geq 6$  приближенно имеем

$$v(z) = \frac{(1+i)\gamma k}{\mu_2} e^{-(1+i)\gamma k z},$$

а при  $\gamma k \leq 0,3$  будет  $v(z) = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{2m_0}{k}\right)$ .

Запишем также выражение для индукции магнитного поля. Подставляя выражение (4) в правую часть соотношения (1) и разлагая полученную функцию в ряд Фурье по времени, для индукции магнитного поля получаем

$$b(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} [b_n(z) e^{(2n+1)it} + b_n^*(z) e^{-(2n+1)it}]. \quad (12)$$

При этом первые два коэффициента разложения запишутся так:

$$b_1(z) = \frac{2u}{1 + \sqrt{1 + 4\epsilon u u^*}}, \quad (13)$$

$$b_3(z) = -\frac{2\epsilon u^3}{3[1 + 3\epsilon u u^* + (1 + \epsilon u u^*) \sqrt{1 + 4\epsilon u u^*}]}. \quad (14)$$

Амплитуды соответствующих гармонических представлений

$$h(z, t) = A(z) \cos(t + \varphi_1), \quad e(z, t) = C(z) \cos(t + \varphi_2),$$

$$b(z, t) = \mathcal{B}_1(z) \cos(t + \varphi_3) + \mathcal{B}_3(z) \cos(3t + \varphi_4),$$

найденных решений (4), (5), (10) — (14), т. е. функции  $A(z)$ ,  $C(z)$ ,  $\mathcal{B}_1(z)$ ,  $\mathcal{B}_3(z)$ , запишутся в виде

$$A(z) = 2\sqrt{u u^*} = \frac{1}{\sqrt{\Phi_0}} [(1 + 2m^2) \operatorname{ch} 2\gamma \cdot k(1-z) + 2m \operatorname{sh} 2\gamma k(1-z) - (1 - 2m^2) \cos 2\gamma k(1-z) + 2m \sin 2\gamma k(1-z)]^{\frac{1}{2}}, \quad (15)$$

$$C(z) = 2\sqrt{v v^*} = \frac{\sqrt{2}\gamma \cdot k}{\sqrt{\Phi_0}} [(1 + 2m^2) \operatorname{ch} 2\gamma k(1-z) + 2m \operatorname{sh} 2\gamma k(1-z) + (1 - 2m^2) \cos 2\gamma \cdot k(1-z) - 2m \sin 2\gamma \cdot k(1-z)]^{\frac{1}{2}}, \quad (16)$$

$$\mathcal{B}_1(z) = 2\sqrt{b_1 b_1^*} = \frac{2A}{1 + \sqrt{1 + \epsilon A^2}}, \quad (17)$$

$$\mathcal{B}_3(z) = 2\sqrt{b_3 b_3^*} = \frac{2\epsilon A^3}{3[4 + 3\epsilon A^2 + (4 + \epsilon A^2) \sqrt{1 + \epsilon A^2}]}. \quad (18)$$

При  $\gamma k \geq 6$  и  $\gamma k \leq 0,3$  соответственно найдем

$$A(z) = \frac{e^{-\gamma k z}}{\sqrt{1 + 2m + 2m^2}}, \quad C(z) = \frac{\sqrt{2}\gamma k e^{-\gamma k z}}{\sqrt{1 + 2m + 2m^2}},$$

$$A(z) = 1 - \frac{m_0}{k} - \left(1 - \frac{2m_0}{k}\right) z, \quad C(z) = 1 - \frac{2m_0}{k},$$

а  $\mathcal{B}_1$  и  $\mathcal{B}_3$  определяются через  $A$  по формулам (17), (18).

Приведем результаты численных исследований распределения амплитуд напряженностей магнитного и электрического полей, а также магнитной индукции по толщине при различных параметрах нагрева.

На рис. 2 показано распределение амплитуды  $A(z)$  магнитного поля для  $\gamma = 1; 6$  при различных значениях параметра нелинейности. Из графиков видно, что при  $\gamma = 1$  (низкие частоты) имеет место линейное распределение поля по толщине слоя, которое не зависит от  $\varepsilon$ , а для  $\gamma = 6$  (высокие частоты) — экспоненциальное распределение поля по толщине. При этом с увеличением  $\varepsilon$  степень затухания уменьшается, т. е. распределение становится близким к ли-

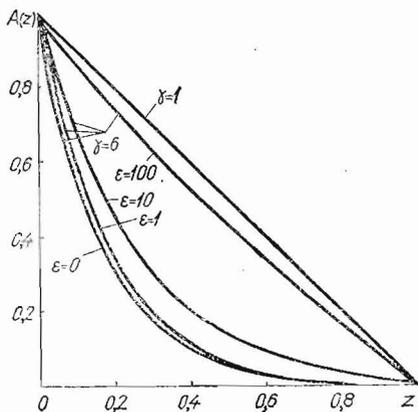


Рис. 2

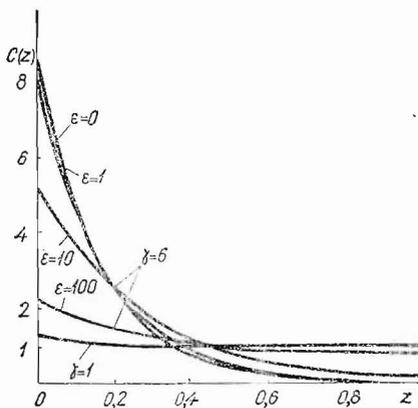


Рис. 3

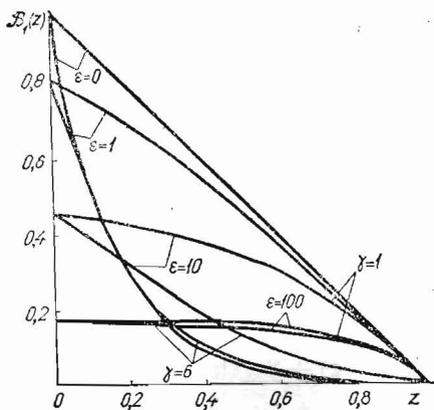


Рис. 4

с увеличением  $\varepsilon$  распределение  $B_1(z)$  по толщине имеет более глубинный характер. Из анализа амплитуды третьей гармоники индукции магнитного поля  $B_3$  следует, что ее максимальное значение составляет не более 8,3 % максимального значения амплитуды первой гармоники  $B_1$ .

Отметим, что численные значения амплитуд  $A(z)$ ,  $C(z)$ ,  $B_1(z)$ ,  $B_3(z)$ , найденные в пренебрежении  $m_0$  ( $m_0 = 0$ ) и по формулам (15) — (18), совпадают с достаточной для практики точностью при исследуемых  $\gamma$ .

нейному. Рис. 3 иллюстрирует распределение амплитуды напряженности электрического поля. При  $\gamma = 1$  оно близко к равномерному, для  $\gamma = 6$  — носит приповерхностный характер, причем значение амплитуды на поверхности и степень затухания уменьшаются с увеличением  $\varepsilon$ . На рис. 4 приведена зависимость первой гармоники индукции магнитного поля от  $z$ . Значения  $B_1(z)$  зависят от параметра  $\varepsilon$  как при  $\gamma = 1$ , так и при  $\gamma = 6$ . При этом для  $\gamma = 1$  распределение  $B_1(z)$  изменяется от линейного к практически равномерному по толщине, за исключением окрестности нижней поверхности  $z = 1$ , а для  $\gamma = 6$

1. Андрейченко Т. Г. Бегущее электромагнитное поле в ферромагнитном пространстве.— В кн.: Нелинейные краевые задачи математической физики. Киев : Ин-т математики АН УССР, 1977, с. 104—110.
2. Березовский А. А., Курбанов И. Плоские электромагнитные волны в средах с общими материальными уравнениями.— В кн.: Нелинейные краевые задачи математической физики. Киев : Ин-т математики АН УССР, 1977, с. 104—110.
3. Колесников П. М. Введение в нелинейную электродинамику.— Минск : Наука и техника, 1971.— 384 с.
4. Солодяк М. Т. Температурные поля и напряжения в магнитотвердом упругом слое при индукционном нагреве в периодическом во времени электромагнитном поле.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1981, вып. 13, с. 69—76.
5. Термоупругость электропроводных тел / Я. С. Подстригач, Я. И. Бурак, А. Р. Гачкевич, Л. В. Чернявская.— Киев : Наук. думка, 1977.— 248 с.