Таким образом, формула Сомильяно в интерпретации (7) имеет практическое значение при решении граничных задач и постановке задач теории тонкостенных включений любой механической природы в анизотропных телах произвольной формы. В последнем случае необходимо только построить достаточно простую, но адекватную модель включения типа (11). Предложенный подход имеет также то преимущество, что для решения соответствующих задач для многосвязных тел используется тензор Грина неограниченной области.

1. *Канаун С. К.* К задаче о пространственной трещине в анизотропной упругой среде.— Прикл. математика и механика, 1981, **45,** № 2, с. 361—370.
2. *Косевич А. М.* Дислокации в теории упругости.— Киев : Наук. думка, 1978.— 220 с.
3. *Новацкий В.* Теория упругости.— М. : Мир, 1975.— 872 с.
4. *Панасюк В. В., Андрейків О. Є., Стадник М. М.* Пружна рівновага необмеженого тіла з тонким включенням.— Доп. АН УРСР. Сер. А, 1976, № 7, с. 637—640.
5. *Победря Б. Е.* Лекции по тензорному анализу.— М. : Изд-во Моск. ун-та, 1979.— 214 с.
6. *Силованюк В. П.* Осесимметричная деформация пространства с двумя тонкими упругими включениями.— Физ.-хим. механика материалов, 1981, **17,** № 2, с. 76—82.
7. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения.— М. : Наука, 1974.— 640 с.
8. *Эскин Г. И.* Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений.— М. : Наука, 1973.— 232 с.

Львовский университет

Поступила в редколлегию 04.12.81

УДК 539.377 : 532.72

М. С. Раврик, А. Л. Бичуя

ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ НАГРЕТОЙ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ ПРИ ДИФФУЗИОННОМ НАСЫЩЕНИИ

Тонкостенные конструкции оболочечного вида с диффузионным упрочнением или покрытиями типа тонких оболочек являются широко распространенными элементами различных изделий, способных надежно работать в заданных эксплуатационных условиях. В этих случаях при оценке их несущей способности существенную роль играют явления, обусловленные немеханическими процессами, например диффузией тепла и вещества [2]. В данной статье проведено исследование влияния указанных процессов на физико-механическое поведение пологой трансверсально-изотропной оболочки.

Рассмотрим бесконечную пологую сферическую оболочку с круговым отверстием радиуса r_0, материал которой представляет собой двухкомпонентный твердый раствор с низкой сдвиговой жесткостью при постоянных начальных значениях температуры t_0 и концентрации c_0. При этом через поверхность оболочки $z = \pm h$ осуществляется конвективный тепло- и массообмен с внешней средой, температура и химический потенциал которой постоянны и соответственно равны t_c и μ_c. Контур отверстия, через который происходит теплообмен по закону Ньютона, принимаем свободным от напряжений и массоизолированным.

Учитывая малое время релаксации температуры по сравнению с процессом диффузии, с достаточной точностью можно принять в начальный момент времени распределение температуры в оболочке установившимся. При этом, пренебрегая в [3] связанностью физических полей с полем деформации, а также влиянием изменения концентрации на распределение температуры, задача об определении усредненных температуры, концентрации вещества и напряженного состояния при одинаковых коэффициентах тепло- и массообмена ($h_t^+ = h_t^- = h_t$, $h_\mu^+ = h_\mu^- = h_\mu$) сводится к решению системы уравнений

$$\Delta T_i - b_i^2 T_i = (2i-1)\, b_i^2 t_i \quad (i = 1,\ 2),$$

$$\left(\Delta - \delta_i - \frac{\partial}{\partial \tau_0}\right) C_i + d_0 (\eta\Delta - \delta_i)\, T_i = (2i-1)\, \delta_i \tilde{\mu}_i / d_c^{e,t}; \qquad (1)$$

$$\Delta w_1 = 0, \quad L_1 w_2 = a^4 R F_1^{tc} + h(1+\nu)(2g^2 - \Delta)\, F_2^{t,c},$$

$$\Delta\varphi_1 = 0, \quad L_1\varphi_2 = -2Eh^3\left[(1+\nu)\frac{h}{R}F_2^{t,c} + \Delta F_1^{t,c}\right],$$

$$\Delta\Psi - 2\Psi/(1+\nu)\varepsilon = 0 \tag{2}$$

при следующих краевых условиях:

$$\frac{\partial T_i}{\partial r} - h_1 h(T_i - T_i^c) = 0, \quad \frac{\partial C_i}{\partial r} + d_0\frac{\partial T_i}{\partial r} = 0 \text{ при } r = r_0,$$

$$\frac{\partial C_i}{\partial r} = \frac{\partial T_i}{\partial r} = 0 \text{ при } r \to \infty, \; C_i = 0 \text{ при } \tau_0 = 0; \tag{3}$$

$$N_r = Q_r = M_r = 0 \text{ при } r = r_0, \tag{4}$$

где

$$\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right); \quad \eta = \lambda^0/L_0; \quad F_i^{t,c} = \alpha_t T_i + \alpha_c C_i;$$

$$L_1 = (\Delta - \alpha_1^2)(\Delta - \alpha_2^2); \quad \alpha_i = h[g^2 + (-1)^i\sqrt{g^4 - a_4}];$$

$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, $w = w_1 + w_2$, Ψ — функции напряжений, перемещений и сдвига [1] соответственно; T_i^c — постоянная величина температуры внешней среды, омывающей поверхность $r = r_0$. Другие введенные здесь обозначения взяты из работы [3].

Учитывая граничные условия для температуры (3), решение уравнения теплопроводности записываем в виде

$$T_i = D_i K_0(b_i r) + (2i-1)(b_1/b_2)^{2i-2}t_i, \tag{5}$$

$$D_i = \frac{h_1 h(T_i^c - t_i)}{b_i K_1(b_i r_0) + h_1 h K_0(b_i r_0)}.$$

Здесь $K_0(r)$, $K_1(r)$ — функции Макдональда нулевого и первого порядков. Применяя к системе дифференциальных уравнений (1) и краевым условиям (3) для концентрации интегральные преобразования Лапласа, с учетом формул (5) находим

$$\tilde{C}_i = -D_i d_0[b_i K_0(r_0 b_i) Z_1^{(i)}(r\tau_0) + K_0(rb_i)g_i(\tau_0)] - (1 - e^{-\delta_i\tau_0})f_i^c, \tag{6}$$

где приняты следующие обозначения:

$$f_i^c = d_0 t_1 - \tilde{\mu}_1/d_c^{e,t}; \quad f_2^c = 3(\delta_2 d_0 b_1^2 t_2/b_2^2 - d_1\tilde{\mu}_2/d_c^{e,t});$$

$$g_i(\tau_0) = 1 - e^{-(\delta_i - b_i^2\eta)\tau_0}; \quad Z_j^{(i)} = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty W_i\Omega_j(rx)\,dx;$$

$$W_i = \frac{1}{x^2 + b_i^2\eta}[e^{-(\delta_i - b_i^2\eta)\tau_0} - e^{-(\delta_i - x^2)\tau_0}]; \quad \tilde{C}_i = C_i - c_0;$$

$$\Omega_1(rx) = [J_0(xr)Y_1(xr_0) - J_1(xr_0)Y_0(xr)][J_1^2(xr_0) + Y_1^2(xr_0)]^{-1};$$

$J_n(x)$, $Y_n(x)$ — функции Бесселя первого и второго рода от действительного аргумента. Подставляя найденные величины температуры и концентрации в уравнение (2), с учетом граничных условий на контуре отверстия (4) и условий затухания напряженного состояния на бесконечности находим в осесимметричном случае неизвестные функции в виде

$$w = \sum_{i=1}^{2}\left[A_i K_0(r\alpha_i) + \frac{\Theta_i}{\beta_i}K_0(rb_i) + \gamma_i E_1^{(i)}(r\tau_0)\right] + \frac{1}{a^4}\Phi_c,$$

$$\varphi = -\frac{2Eh^3}{Ra^4}\sum_{i=1}^{2}\left[\alpha_i^2 A_i K_0(r\alpha_i) + \frac{\Theta_i\nu_i}{\beta_i}b_i K_0(rb_i)\right] +$$

$$+ (1+\nu)h\Phi_c^- - \gamma_1 E_3^{(1)}(r\tau_0) - \gamma_2 a^4 E_1^{(2)}(r\tau_0).$$

$$\Psi \equiv 0. \tag{7}$$

Здесь

$$A_i = (-1)^i \frac{\alpha_{3-i}}{\Delta(r_0)} [\alpha_{3-i}^2 P_1(r\tau_0) K_1(r_0\alpha_{3-i}) + P_1(r_0\tau_0) L_{3-i}(r_0\alpha_{3-i})];$$

$$\beta_i = b_i^4 - 2g^2 b_i^2 + a^4;\ \ \nu_1 = b_1^2;\ \ \beta_3 = x^4 + 2g^2x^2 + a^4;\ \ \nu_2 = a^4/(a^4\varepsilon - b_2^2);$$

$$\gamma_1 = D_1 R a^4 \alpha_c d_0 b_1 K_1(r_0 b_1);\quad \gamma_2 = D_2 h(1+\nu)\alpha_c d_0 b_2 K_1(r_0 b_2);$$

$$\Theta_1 = D_1 R a^4 [\alpha_t - \alpha_c d_0 g_1(\tau_0)];\quad \Theta_2 = D_2 h(1+\nu)(\varepsilon\alpha^4 - b_2^2) \times$$

$$\times [\alpha_t - \alpha_c d_0 g_2(\tau_0)];\quad \Phi_c = a^4 [R\Phi_c^+ - \varepsilon h(1+\nu)\Phi_c^-];$$

$$\Phi_c^+ = \alpha_t t_1 - \alpha_c f_1^c (1 - e^{-\delta_1\tau_0});\quad \Phi_c^- = 3b_1^2 t_2 \alpha_t / b_2^2 - \alpha_c f_2^c (1 - e^{-\delta_2\tau_0})/\delta_2;$$

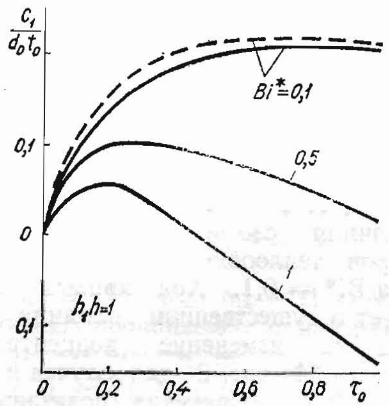

Рис. 1

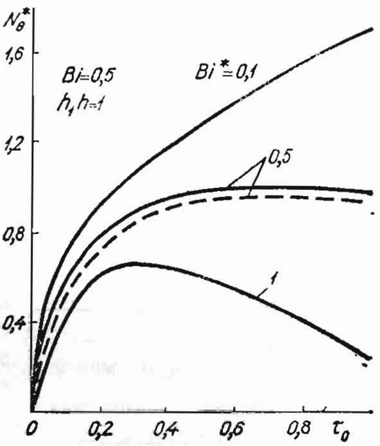

Рис. 2

$$\Omega_3(rx) = x^2\Omega_1(rx);\quad \Omega_2(rx) = (\varepsilon a^4 - x^2)\Omega_1(rx);\quad E_j^{(i)}(r\tau_0) = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty W_i \Omega(rx)\frac{dx}{\beta_3};$$

$$\Delta(r_0) = \alpha_1\alpha_2 [\alpha_2^2 K_1(r_0\alpha_2) L_1(r_0\alpha_1) - \alpha_1^2 K_1(r_0\alpha_1) L_2(r_0\alpha_2)];$$

$$L_i(r_0\alpha_i) = \alpha_i K_0(r_0\alpha_i) + \frac{1-\nu}{r_0} K_1(r_0\alpha_i);$$

$$P_1(r_0\tau_0) = -\left[\sum_{i=1}^{2} \frac{\Theta_i}{\beta_i} b_i K_1(r_0 b_i) + \frac{\Theta_2}{\varepsilon a^4 - b_2^2} K_1(r_0 b_2)\right];$$

$$P_2(r_0\tau_0) = \sum_{i=1}^{2}\left[\frac{\Theta_i b_i}{\beta_i} L_3(r_0 b_i) + \gamma_i E_2^i(r_0\tau_0)\right] + G(r_0\tau_0);$$

$$G(r_0\tau_0) = \frac{\Theta_2}{\varepsilon a^4 - b_2^2} K_0(r_0 b_2) - \gamma_2 Z_1^2(r_0\tau_0) + h(1+\nu)\Phi_c^-.$$

Отметим, что выражение (7) записано для случая, когда $g^2 > a^2$.

Таким образом, подставляя значения искомых функций w, φ, Ψ, $F_i^{t,c}$ в формулы работы [3], находим усилия и моменты в сферической оболочке, находящейся под воздействием температуры и химического потенциала внешней среды.

Не ограничивая общности, примем, что

$$t_c^+ = t_c^- = t_0,\quad T_i^c = 0,\quad \mu_c^\pm = 0, \tag{8}$$

т. е. диффузионный процесс в оболочке вызван изменением температуры. Тогда окружное усилие в пологой сферической оболочке, обусловленное температурным и концентрационным полями, определяется выражением

$$N_\theta = -\frac{2Eh}{a^4 R\Delta(r_0)}\Big\{\alpha_1^3\alpha_2^3 [K_1(r_0\alpha_1) H_2(r\alpha_2) - K_1(r_0\alpha_2) H_1(r_0\alpha_1)] \tilde{P}_2(r_0\tau_0) +$$

$$+\frac{\Theta_1 b_1}{\beta_1}\left[\Delta(r_0) H_3(rb_1) - \langle \alpha_2^2 L_1(r_0\alpha_1) H_2(r\alpha_2) - \alpha_1^2 L_2(r_0\alpha_2) H_1(r\alpha_1)\rangle K_1(r_0 b_1)\right] -$$

$$- \gamma_1 \Delta(r_0) \left\langle E_3^{(1)}(r\tau_0) - \frac{1}{r} E_1^{(1)}(r\tau_0) \right\rangle \Big\}, \qquad (9)$$

где

$$H_{ij}(r\alpha_j) = \alpha_j K_0(r\alpha_j) + \frac{1}{r} K_1(r\alpha_j) \quad (j = 1,\ 2,\ 3, \quad \alpha_3 = b_1);$$

$$\tilde{P}_2(r_0\tau_0) = \frac{\Theta_1 b_1}{\beta_1}\left[\left(b_1 + \frac{1-\nu}{r_0}\right) K_1(r_0 b_1) - \gamma_1 E_3^{(1)}(r_0\tau_0)\right].$$

Значения других компонент напряженного состояния N_r, M_r, Q_r и M_θ ввиду громоздкости их выражений здесь не приведены.

Численный анализ полученных результатов представлен в виде графиков. Расчеты проводили для оболочек с параметрами $\nu = 0,3$, $h/R = 0,06$, $r_0 = 4$, $\lambda^0 = L_0 = 1$. На рис. 1 показано изменение во времени безразмерной величины концентрации $\tilde{C}_1 = C_1/d_0 t_0$ на контуре кругового отверстия $r = r_0$ для различных соотношений параметров $\mathrm{Bi} = h_t h = 0,5$ и $\mathrm{Bi}^* = h_\mu h = 0,1$; 0,5; 1 (кривые *1*, *2*, *3* соответственно). Штриховая линия соответствует значениям параметров теплообмена $\mathrm{Bi} = 1$ и массообмена $\mathrm{Bi}^* = 0,1$. Ход кривых свидетельствует о существенном влиянии массообмена на изменение концентрации во времени. На рис. 2 для случая $h_1 h = 1$, $\mathrm{Bi} = 0,5$ и параметра податливости на сдвиг $E/G' = 60$ приведены графики изменения концентрационных усилий $N_\theta^* = N_\theta a^4 R/2Eh\alpha_c d_0 t_0$ на контуре отверстия, вызванных только неравномерным распределением концентрации растворенного вещества ($\alpha_t = 0$) в зависимости от массообмена с боковых поверхностей оболочки. Штриховой линией показано распределение усилий для материала оболочки с податливостью на сдвиг $E/G' = 80$. Сплошные кривые на рис. 3 соответствуют изменению концентрационных моментов при $h_1 h = 10$, $\tau_0 = 10$ (кривая *1*) и $h_1 h = 1$, $\tau_0 = 1$; 10 (кривые *2*, *3* соответственно) в зависимости от массообмена. Распределение моментов, обусловленных одновременно полями температур и концентрации, представлены штриховыми при $\alpha_c d_0/\alpha_t = 0,5$, которые по сравнению с температурными меняют знак.

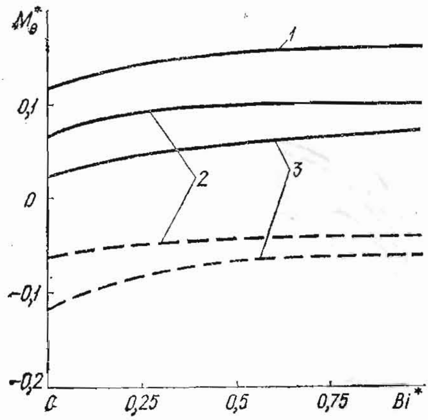

Рис. 3

Из приведенных исследований следует, что одновременный учет диффузионных процессов теплопроводности и диффузии существенно влияют на величину и характер изменения суммарного напряженного состояния в оболочке.

1. *Пелех Б. Л.* Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. — Киев : Наук. думка, 1973.— 248 с.
2. *Подстригач Я. С., Павлина В. С., Шевчук П. Р.* Влияние диффузионного насыщения на концентрацию температурных напряжений в пластинке с круговым отверстием.— Концентрация напряжений, 1971, вып. 3, с. 121—125.
3. *Швец Р. Н., Раврик М. С.* Некоторые вопросы теории упругих ортотропных оболочек и пластин типа Тимошенко с учетом термодиффузионных процессов.— Мат. физика, 1975, вып. 18, с. 152—159.

Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР,
Физико-механический институт им. Г. В. Карпенко АН УССР

Поступила в редколлегию 23.11.81