Из равенства рангов и инвариантных многочленов матриц

$$\left\| \begin{matrix} \varepsilon(x) E_{n-t} & 0 \\ -\overline{B}(x) & E_t \end{matrix} \right\|, \quad \left\| \begin{matrix} \varepsilon(x) E_{n-t} & 0 \\ -\overline{B}(x) & E_t \\ s_{11}\varepsilon(x) \ \ldots & s_{1n}\varepsilon(x) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ s_{n-t1}\varepsilon(x) \ \ldots & s_{n-tn}\varepsilon(x) \end{matrix} \right\|$$

следуют существование и единственность матрицы $Y_1(x)$. Теперь равенство определителей левой и правой частей уравнения (7) указывает на обратимость матрицы $Y(x)$, что приводит к подобию матриц $A(x)$ и $B(x)$. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. При выполнении условий теоремы 1 матрица H такая, что $A(x) = HB(x)H^{-1}$, и имеет вид

$$H = C_1^{-1} \left\| \begin{matrix} s_{11} & \ldots & s_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{n1} & \ldots & s_{nn} \end{matrix} \right\| C_2, \quad s_{ij} \in \mathbb{C}.$$

Доказательство этой теоремы проводится с использованием теоремы 3 и следствия 2 работы [3].

1. *Казимирский П. С.* Решение проблемы выделения регулярного множителя из матричного многочлена.— Укр. мат. журн., 1980, **32**, № 4, с. 483—498.
2. *Казімірський П. С.* Квазіунітальні та супровідні матриці матричних многочленів.— У кн.: Теоретичні та прикладні питання алгебри і диференціальних рівнянь. К. : Наук. думка, 1977, с. 29—52.
3. *Казімірський П. С., Петричкович В. М.* Про еквівалентність поліноміальних матриць.— Там же, с. 61—66.
4. *Казимирский П. С., Шаваровский Б. З.* К подобию матричных многочленов.— В кн.: XVI Всесоюз. алгебр. конф. (Л., сент. 1981 г.) : Тез. докл.: Л., 1981, ч. 2, с. 63—64.
5. *Ланкастер П.* Теория матриц.— М. : Наука, 1978.— 280 с.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
14.10.81

УДК 517.524

Д. И. Боднар, Х. И. Кучминская

АБСОЛЮТНАЯ СХОДИМОСТЬ ЧЕТНОЙ И НЕЧЕТНОЙ ЧАСТИ ДВУМЕРНОЙ СООТВЕТСТВУЮЩЕЙ ЦЕПНОЙ ДРОБИ

Разложение функций в соответствующие цепные дроби является одним из наиболее употребляемых способов построения ее дробно-рациональных приближений [7]. При исследовании сходимости соответствующих цепных дробей с комплексными компонентами существенно используется представление их подходящих дробей в виде произведения дробно-линейных отображений [8]

$$\frac{P_n}{Q_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i \,|}{|\, b_i} = t_1 t_2 \ldots t_n(0), \quad t_i(w) = \frac{a_i}{b_i + w}.$$

Такое представление дало возможность Стилтьесу построить четную и нечетную части цепной дроби [5], на основании которых было введено понятие фундаментальных неравенств [8].

Определение 1. Четной (нечетной) частью дроби

$$\frac{1\,|}{|\,1} + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{a_i \,|}{|\,1} \tag{1}$$

называется дробь, подходящие дроби которой совпадают с четными [нечетными] подходящими дробями дроби (1).

Определение 2. Дробь (1) удовлетворяет фундаментальным неравенствам, если существуют такие числа $r_i \geqslant 0$, что

$$r_i |1 + a_i + a_{i+1}| \geqslant r_i r_{i-2} |a_i| + |a_{i+1}|, \quad i = 1, 2, \ldots;$$
$$a_1 = 0, \; r_{-1} = 0, \; r_0 = 0. \tag{2}$$

Существует две интерпретации фундаментальных неравенств: если ряд $\sum_{p=1}^{\infty} r_1 \ldots r_p$ сходится, то дробь сходится; если первые два неравенства в (2) строгие, то четная и нечетная части цепной дроби сходятся.

Эти интерпретации используются при установлении большого числа признаков сходимости дробей, в частности, таких, как признак Ворпицкого, параболическая теорема [8].

В работах [3, 4, 6] введено понятие двумерной соответствующей цепной дроби для двойного степенного ряда. Вопрос поточечной сходимости таких дробей приводит к рассмотрению числовых дробей вида

$$\frac{1|}{|\Phi_0} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_{ii}|}{|\Phi_i}, \quad \Phi_i = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_{m+i,i}|}{|1} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_{i,m+i}|}{|1}, \tag{3}$$

где a_{ij} — комплексные числа.

Определение 3. n-й подходящей дробью дроби (3) называется конечная дробь

$$\frac{A_n}{B_n} = \frac{1|}{|\Phi_0^{(n)}} + \sum_{i=1}^{[n/2]} \frac{a_{ii}|}{|\Phi_i^{(n-i)}}, \quad \Phi_i^{(n-2i)} = 1 + \sum_{m=1}^{n-2i} \frac{a_{m+i,i}|}{|1} + \sum_{m=1}^{n-2i} \frac{a_{i,m+i}|}{|1}. \tag{4}$$

Здесь $[n/2]$ — целая часть числа $n/2$; $\Phi_i^{(0)} = 1$.

Замечание 1. n-я подходящая дробь содержит все элементы a_{ij}, сумма индексов которых не превышает n.

Определение 4. Двумерная соответствующая цепная дробь называется сходящейся, если существует и конечен предел последовательности ее подходящих дробей.

Дадим определение подходящей дроби цепной дроби (3), используя композицию дробно-линейных отображений.

Пусть

$$t_{ij}(w) = \frac{1}{1 + a_{ij} w}, \quad i \neq j; \quad i, j = 0, 1, \ldots \tag{5}$$

$$t_{ii}(x, y, z) = \frac{1}{1 + a_{i,i-1}x + a_{i-1,i}y + a_{ii}z}, \quad i = 1, 2, \ldots \tag{6}$$

и

$$\begin{gathered} T_{k-i,i} = t_{i+2,i} t_{i+3,i} \ldots t_{k-i,i}(1), \\ T_{i,k-i} = t_{i,i+2} t_{i,i+3} \ldots t_{i,k-i}(1), \; 0 \leqslant i \leqslant \left[\frac{k}{2}\right] - 1, \; k > i, \; k \geqslant 2. \end{gathered} \tag{7}$$

Тогда

$$\frac{A_{2n}}{B_{2n}} = t_{11}(T_{2n,0};\; T_{0,2n};\; t_{22}(T_{2n-1,1};\; T_{1,2n-1};\; \ldots;\; t_{nn}(T_{n+1,n-1};\; T_{n-1,n+1};$$
$$t_{n+1,n+1}(0, 0, 0)) \ldots),$$

$$\frac{A_{2n+1}}{B_{2n+1}} = t_{11}(T_{2n+1,0};\; T_{0,2n+1};\; t_{22}(T_{2n,1};\; T_{1,2n};\; \ldots;\; t_{nn} \times$$
$$\times (T_{n+2,n-1};\; T_{n-1,n+2};\; t_{n+1,n+1}(1, 0, 0)) \ldots),$$
$$n = 1, 2, \ldots, \; A_1/B_1 = t_{11}(1, 1, 0) = (1 + a_{10} + a_{01})^{-1}.$$

Замечание 2. В дальнейшем формулы типа (7), симметричные относительно перестановки индексов, будем записывать в виде

$$T_{k-i,i} = t_{i+2,i} t_{i+3,i} \ldots t_{k-i,i}(1) \tag{7^c}$$

предполагая справедливость аналогичной формулы и при перестановке индексов.

Построим четную и нечетную части дроби (3). Пусть

$$
\begin{aligned}
s_{k,2i}(w) &= t_{2k-1,2i}t_{2k,2i}(w) = 1 - \frac{a_{2k-1,2i}}{1 + a_{2k-1,2i} + a_{2k,2i}w},\\
s_{r,2i+1}(w) &= t_{2r,2i+1}t_{2r+1,2i+1}(w) = 1 - \frac{a_{2r,2i+1}}{1 + a_{2r,2i+1} + a_{2r+1,2i+1}w},
\end{aligned}
\tag{8^c}
$$

$$k = \overline{i+2,\ n-i};\quad r = \overline{i+2,\ n-i+1},\ 0 \leqslant i \leqslant \left[\frac{n}{2}\right] - 1.$$

Тогда

$$T_{2n-2i,2i} = t_{2i+2,2i}s_{i+2,2i}\ldots s_{n-i,2i}(1) = \frac{1|}{|1 + a_{2i+2,2i}} + \sum_{k=i+1}^{n-i-1} \frac{-a_{2k,2i}a_{2k+1,2i}|}{|1 + a_{2k+1,2i} + a_{2k+2,2i}},$$

$$
\begin{aligned}
T_{2n-2i+1,2i-1} &= t_{2i+1,2i-1}s_{i+1,2i-1}\ \ldots\ s_{n-i,2i-1}(1) =\\
&= \frac{1|}{|1 + a_{2i+1,2i-1}} + \sum_{k=i+1}^{n-i} \frac{-a_{2k-1,2i-1}a_{2k,2i-1}|}{|1 + a_{2k,2i-1} + a_{2k+1,2i-1}}.
\end{aligned}
\tag{9^c}
$$

Следовательно,

$$\frac{A_{2n}}{B_{2n}} = \sum_{i=0}^{n} \frac{\alpha_{ii}|}{|F_i^{(n-i)}}, \tag{10}$$

где

$$F_i^{(n-i)} = \beta_{ii} + \sum_{p=1}^{n-i} \frac{\alpha_{i+p,i}|}{|\beta_{i+p,i}} + \sum_{p=1}^{n-i} \frac{\alpha_{i,i+p}|}{|\beta_{i,i+p}},\quad F_n^{(0)} = \beta_{nn}; \tag{11}$$

$$
\begin{gathered}
\beta_{ii} = 1,\ \beta_{i+1,i} = 1 + a_{i+2,i},\ \alpha_{ii} = a_{ii},\ \alpha_{i+1,i} = a_{i+1,i}\alpha_{00} = 1,\\
\alpha_{ki} = -a_{2k-i-2,i}a_{2k-i-1,i},\ \beta_{ki} = 1 + a_{2k-1-i,i} + a_{2k-i,i},\\
i \geqslant 0,\ k - i \geqslant 2.
\end{gathered}
\tag{12^c}
$$

Определение 5. Дробь

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\alpha_{ii}|}{|F_i},\quad F_i = \beta_{ii} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_{m+i,i}|}{|\beta_{m+i,i}} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_{i,m+i}|}{|\beta_{i,m+i}} \tag{13}$$

называется четной (нечетной) частью дроби (3), если для ее подходящих дробей P_n/Q_n справедливо равенство

$$P_n/Q_n = A_{2n}/B_{2n}\quad (P_n/Q_n = A_{2n-1}/B_{2n-1}).$$

Здесь

$$P_n/Q_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{\alpha_{ii}|}{|F_i^{(n-i)}}\quad \left(P_n/Q_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\alpha_{ii}|}{|F_i^{(n-i)}}\right)$$

и $F_i^{(n-i)}$, $i = \overline{0, n}$ определяются согласно формулам (11).

По доказанному компоненты α_{ij}, β_{ij} $(i, j = 0, 1, \ldots)$ четной части дроби (3) определяются по формулам (12^c).

Аналогично доказывается, что дробь (13) является нечетной частью дроби (3) в том случае, когда

$$
\begin{gathered}
\alpha_{00} = 1,\ \alpha_{ii} = a_{ii},\ \beta_{ii} = 1 + a_{i+1,i} + a_{i,i+1},\\
\alpha_{ki} = -a_{2k-1-i,i}a_{2k-i,i},\ \beta_{ki} = 1 + a_{2k-i,i} + a_{2k+1-i,i};\quad k > i,\ i = 0, 1, \ldots
\end{gathered}
\tag{14^c}
$$

Определение 6. Дробь (3) удовлетворяет фундаментальным неравенствам, если существуют такие действительные числа $r_{ij} > 0$ $(i, j = 0, 1, \ldots)$, $0 < \gamma <$

$< \frac{1}{2}$, что

а) $r_{ii} \,|\, 1 + a_{i+1,i} + a_{i,i+1} \,| > 2r_{ii} \max \{|\, a_{ii} \,|,\ |\, a_{i+1,i+1} \,|\} + \max \{|\, a_{i+1,i} \,|,\ |\, a_{i,i+1} \,|\}$;

б) $r_{i+1,i} \,|\, 1 + a_{i+2,i} \,| \geqslant |\, a_{i+2,i} \,| + \frac{1}{\gamma}\, r_{i+1,i} \,|\, a_{i+1,i} \,|$;

в) $r_{i+2,i} \,|\, 1 + a_{i+2,i} + a_{i+3,i} \,| \geqslant 2r_{i+2,i} r_{ii} \,|\, a_{i+2,i} \,| + |\, a_{i+3,i} \,|$; $\qquad (15^c)$

г) $r_{i+j,i} \,|\, 1 + a_{i+j,i} + a_{i+j+1,i} \,| \geqslant r_{i+j,i} r_{i+j-2,i} \,|\, a_{i+j,i} \,| + |\, a_{i+j+1,i} \,|$, $\ j \geqslant 3$;

д) $|\, a_{ii} \,| \leqslant \frac{1}{4} (1 - 2\gamma)^2$; $\quad i = 0, 1, 2, \ldots$

Теорема. Если дробь (3) удовлетворяет системе фундаментальных неравенств (15^c), то ее четная и нечетная части абсолютно сходятся.

Доказательство. Нечетная часть дроби (3) эквивалентными преобразованиями с учетом неравенств а), в) и г) для четных j приводится к виду

$$D(x) = \frac{g_{00} x_{00} \,|}{|\, 2 + F_0} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{g_{i-1,i-1} g_{ii} x_{ii} \,|}{|\, 2 + F_i}, \tag{16}$$

$$F_i = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(1 - g_{i+j,i})\, g_{i+j+1,i} x_{i+j+1,i} \,|}{|\, 1} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(1 - g_{i,i+j})\, g_{i,i+j+1} x_{i,i+j+1} \,|}{|\, 1},$$

где $|\, x_{ij} \,| \leqslant 1$ и

$$\begin{gathered} g_{ii} = 1 - \max \{|\, a_{i+1,i} \,|,\ |\, a_{i,i+1} \,|\} \{r_{ii} \,|\, 1 + a_{i+1,i} + a_{i,i+1} \,|\}^{-1}; \\ g_{p+i,i} = 1 - |\, a_{2p+i+1,i} \,| \{r_{2p+i,i} \,|\, 1 + a_{2p+i,i} + a_{2p+1+i,i} \,|\}^{-1}; \\ p = 1, 2, \ldots;\ i = 0, 1, \ldots;\ 0 \leqslant g_{ij} \leqslant 1,\ i \neq j; \quad 0 < g_{ii} \leqslant 1. \end{gathered} \tag{17^c}$$

Положим в дроби (16) все $x_{ij} = -1$, $i, j = 0, 1, \ldots$; $x_{00} = 1$. Полученную дробь обозначим через D (—1), а ее подходящие дроби — через C_n/D_n, $n = 0, 1, \ldots$

Учитывая формулу разности между подходящими дробями дробей $D(x)$ и $D(-1)$ [2], легко убеждаемся, что

$$\left| \frac{P_r}{Q_r} - \frac{P_m}{Q_m} \right| \leqslant \frac{C_m}{D_m} - \frac{C_r}{D_r} \quad (r < m).$$

Поскольку подходящие дроби $\{C_n/D_n\}$ монотонно возрастают, то для доказательства абсолютной сходимости нечетной части дроби (3) достаточно показать ограниченность сверху последовательности $\{C_n/D_n\}$:

$$\frac{C_n}{D_n} = \frac{g_{00}/F_0^{(n)} \,|}{|\, 1} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{g_{i-1,i-1} g_{ii}/[F_{i-1}^{(n-i+1)} F_i^{(n-i)}] \,|}{|\, 1}.$$

Здесь

$$F_i^{(n-i)} = 2 - \sum_{j=i}^{n-1} \frac{(1 - g_{ji})\, g_{j+1,i} \,|}{|\, 1} - \sum_{j=i}^{n-1} \frac{(1 - g_{ij})\, g_{i,j+1} \,|}{|\, 1}; \quad F_{n-1}^{(1)} = 2.$$

Учитывая признаки сходимости g-дробей [8], получаем

$$1/F_i^{(n-i)} \leqslant 1/(2g_{ii}),$$

поэтому

$$\frac{C_n}{D_n} < \frac{{}^1/_2 \,|}{|\, 1} - \frac{{}^1/_4 \,|}{|\, 1} - \frac{{}^1/_4 \,|}{|\, 1} - \cdots = 1.$$

Четную часть дроби (3) эквивалентными преобразованиями с учетом неравенств б), д) и г) для нечетных j приводим к виду

$$\frac{1|}{|1+\gamma\Phi_0} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_{ii}|}{|1+\gamma\Phi_i}, \tag{18}$$

$$\Phi_i = \frac{g_{i+1,i}x_{i+1,i}}{1+\sum\limits_{j=i}^{\infty}\frac{(1-g_{j+1,i})\,g_{j+2,i}x_{j+2,i}|}{|1}} + \frac{g_{i,i+1}x_{i,i+1}}{1+\sum\limits_{j=i}^{\infty}\frac{(1-g_{i,j+1})\,g_{i,j+2}x_{i,j+2}|}{|1}},$$

где $|x_{ij}| \leqslant 1$ и

$$\begin{gathered} g_{i+1,i} = 1-|a_{i+2,i}|\,\{r_{i+1,i}|\,1+a_{i+2,i}|\}^{-1}; \\ g_{i+p,i} = 1-|a_{2p+i+1,i}|\,\{r_{2p+i-1,i}\,|\,1+a_{2p-1+i,i}+a_{2p+i,i}|\}^{-1}; \\ 0 \leqslant g_{ij} \leqslant 1,\ p=2,\ 3,\ \ldots;\quad i=0,\ 1,\ \ldots \end{gathered} \tag{19^c}$$

Как и в случае сходимости дроби (16), нетрудно показать, что дробь (18) мажорируется дробью [1]

$$\frac{1|}{|1-2\gamma} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|a_{ii}|/(1-2\gamma)^2|}{|1},$$

которая абсолютно сходится, согласно признаку Ворпицкого.

1. *Боднар Д. И.* Признаки сходимости ветвящихся цепных дробей с частными звеньями вида $\frac{(1-g_{i_1i_2\ldots \hat{i_k}})\, g_{i_1i_2\ldots i_k} x_{i_1i_2\ldots i_k}}{1}$.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1982, вып. 15, с. 30—35.
2. *Боднар Д. И., Кучминская Х. И.* О сходимости разложений функций двух переменных в соответствующую ветвящуюся цепную дробь.— Там же, 1980, вып. 11, с. 3—6.
3. *Кучминская Х. И.* Соответствующая и присоединенная ветвящиеся цепные дроби для двойного степенного ряда.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1978, № 7, с. 614—617.
4. *Кучминская Х. И.* Разложение двойного степенного ряда в соответствующую и присоединенную ветвящиеся цепные дроби.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1979, вып. 9, с. 14—19.
5. *Стилтьес Т. И.* Исследования по непрерывных дробях.— М. : ОНТИ, 1936.— 155 с.
6. *Murphy J. A., O'Donohoe.* A two-variable generalization of the Stieltjes — type continued fraction.— J. Comp. and Appl. Math., 1978, **4**, N 3, p. 181—190.
7. *Perron O.* Die Lehre von der Kettenbrüchen. Stuttgart : Teubner, 1957.— Bd. 2. 524 S.
8. *Wall H. S.* Analytic theory of continued fractions.— New York : Van Nostrand co. 1948.— 433 p.

Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию 04.12.81

УДК 518.5+517.9

Н. В. Опыр

ПОСТРОЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, КОЭФФИЦИЕНТЫ КОТОРЫХ ИМЕЮТ ОСОБЕННОСТИ ТИПА ДЕЛЬТА-ФУНКЦИИ

При исследовании сложных колебательных систем полезно иметь аналитическое выражение характеристического определителя. Поэтому интенсивно развиваются аналитические методы построения характеристических определителей [3—5]. Эти методы удобно применять на ЭВМ, предусматривающих автоматизацию аналитических преобразований. В данной работе предложен аналитический способ построения характеристических определителей для дифференциальных уравнений, которые содержат коэффициенты с особенностями типа дельта-функции. Такими уравнениями описываются, в частности, задачи о малых колебаниях и устойчивости стержней с заданным числом сосредоточенных масс и упругих опор. Эти уравнения имеют вид

$$L[y] - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_i(x)\, y(x)\, \delta(x-x_i) = 0, \tag{1}$$