$(A_i, B_i \in P_{n,n}\ (i = 1, 2)$, E — единичная матрица) — матричные унитальные квадратные трехчлены. Пусть, далее,

$$\operatorname{rang}\left\|\begin{matrix} E & 0 & E & 0 \\ A_1 & E & B_1 & E \\ A_2 & A_1 & B_2 & B_1 \\ 0 & A_2 & 0 & B_2 \end{matrix}\right\| = \operatorname{rang}\left\|\begin{matrix} E & 0 & E & 0 \\ A_1 & E & B_1 & E \\ A_2 & A_1 & B_2 & B_1 \end{matrix}\right\|.$$

Если матрица $A_1 - B_1$ неособенная, то трехчлены $A(x)$ и $B(x)$ имеют общий линейный делитель $Ex - D$, причем $D = -(A_2 - B_2)(A_1 - B_1)^{-1}$.

Аналогичными рассуждениями можно получить следующий критерий делимости матричных многочленов.

Лемма 3. Пусть

$$A(x) = A_0x^p + A_1x^{p-1} + \cdots + A_p; \quad B(x) = B_0x^q + B_1x^{q-1} + \cdots + B_q,$$

$$A_i,\ B_j \in P_{n,n} \quad (i = 0, 1, \ldots, p;\quad j = 0, 1, \ldots, q), \quad p \geqslant q$$

и $B(x)$ — регулярный матричный многочлен. Тогда $B(x)$ является делителем $A(x)$, т. е. $A(x) = B(x)C(x)$ в том и только том случае, если

$$\operatorname{rang}\left\|\underbrace{\begin{matrix} B_0 & & & \\ B_1 & B_0 & & \\ \vdots & B_1 & \vdots & \\ B_q & \vdots & \vdots & B_0 \\ & B_q & \vdots & B_1 \\ & & \vdots & \vdots \\ & & \cdot & B_q \end{matrix}}_{p-q+1}\right\| = \operatorname{rang}\left\|\begin{matrix}\underbrace{\begin{matrix} B_0 & & & \\ B_1 & B_0 & & \\ \vdots & B_1 & \vdots & \\ B_q & \vdots & \vdots & B_0 \\ & B_q & \vdots & B_1 \\ & & \vdots & \vdots \\ & & \cdot & B_q \end{matrix}}_{p-q+1} & \begin{matrix} A_0 \\ A_1 \\ \\ \vdots \\ \\ \\ A_p \end{matrix}\end{matrix}\right\|.$$

1. *Гохберг И. Ц., Хайниг Г.* Результантная матрица и ее обобщения. I. Результантный оператор матричных полиномов.— Acta sci. math., 1975, 37, № 1/2, с. 41—61.

Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР, Львовский университет

Поступила в редколлегию 18.05.81

УДК 512.8

О. М. Мельник

К ПОДОБИЮ МАТРИЧНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

Рассмотрим полиномиальные матрицы $A(x) = Ex^m + A_1x^{m-1} + \ldots + A_m$ и $B(x) = Ex^m + B_1x^{m-1} + \ldots + B_m$, где A_j, B_j $(j = \overline{1, m})$ — $n \times n$-матрицы над $\mathbb{C}$. Пусть $\operatorname{diag}(1, \ldots, 1, \underbrace{\varepsilon(x), \ldots, \varepsilon(x)}_{t})$ — нормальная форма Смита матриц $A(x)$ и $B(x)$. Тогда $A(x)$ и $B(x)$ полускалярно эквивалентными преобразованиями [3] приводятся соответственно к виду

$$C_1A(x)Q_1(x) = \left\|\begin{matrix} E_{n-t} & 0 \\ \overline{A}(x) & \varepsilon(x)E_t \end{matrix}\right\|, \quad C_2B(x)Q_2(x) = \left\|\begin{matrix} E_{n-t} & 0 \\ \overline{B}(x) & \varepsilon(x)E_t \end{matrix}\right\|,$$

где

$$\overline{A}(x) = \left\|\begin{matrix} a_{11}(x) & \ldots & a_{1n-t}(x) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{t1}(x) & \ldots & a_{tn-t}(x) \end{matrix}\right\|; \quad \overline{B}(x) = \left\|\begin{matrix} b_{11}(x) & \ldots & b_{1n-t}(x) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ b_{t1}(x) & \ldots & b_{tn-t}(x) \end{matrix}\right\|.$$

Случай $t = 1$ исследован в работе [4].

Рассмотрим числовую матрицу M размером $mn(n-t)\times n^2$:

$$\left\|\begin{array}{ccc:c} M_{\|-\overline{A}(x)E_t\|}(\varepsilon) & & & M_{\|b_{11}(x)\dots b_{t1}(x)\|\otimes\|-\overline{A}(x)E_t\|}(\varepsilon) \\ & & 0 & \\ & M_{\|-\overline{A}(x)E_t\|}(\varepsilon) & & M_{\|b_{12}(x)\dots b_{t2}(x)\|\otimes\|-\overline{A}(x)E_t\|}(\varepsilon) \\ 0 & \ddots & & \\ & & M_{\|-\overline{A}(x)E_t\|}(\varepsilon) & M_{\|b_{1n-t}(x)\dots b_{tn-t}(x)\|\otimes\|-\overline{A}(x)E_t\|}(\varepsilon) \end{array}\right\|.$$

Здесь $M_{\|b_{1i}(x)\dots b_{ti}(x)\|\otimes\|-\overline{A}(x)E_t\|}(\varepsilon)$, $M_{\|-\overline{A}(x)E_t\|}(\varepsilon)$, $i=\overline{1,\ n-t}$ — матрицы значений матриц $\|b_{1i}(x)\ \dots\ b_{ti}(x)\|\otimes\|-\overline{A}(x)E_t\|$ и $\|-\overline{A}(x)E_t\|$ на системе корней многочлена $\varepsilon(x)$ [1]; $\otimes$ — знак прямого произведения матриц [5].

Теорема 1. Для подобия матриц $A(x)$ и $B(x)$ необходимо и достаточно, чтобы уравнение

$$M\|x_{11}\ \dots\ x_{n1}\ \dots\ x_{1n-t+1}\ \dots\ x_{nn-t+1}\ \dots\ x_{1n}\ \dots\ x_{nn}\|^T=\|0\ \dots\ 0\|^T \quad (1)$$

имело решение $\|s_{11}\ \dots\ s_{n1}\ \dots\ s_{1n}\ \dots\ s_{nn}\|^T$, подстолбик которого, образованный его последними nt элементами, удовлетворял условию, что

$$\|-A(\alpha_\nu)\,E_t\|\left\|\begin{matrix} s_{1n-t+1} & \dots & s_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ s_{nn-t+1} & \dots & s_{nn}\end{matrix}\right\| \quad (2)$$

— неособенная матрица для всех $\nu=\overline{1,\ p}$, где p — число различных корней многочлена $\varepsilon(x)$.

Доказательство. Необходимость. Если матрицы $A(x)$ и $B(x)$ подобны, т. е. имеется неособенная матрица H такая, что $A(x)=HB(x)H^{-1}$, то существуют [3] такие неособенная матрица S^{-1} над $\mathbb{C}$ и обратимая полиномиальная матрица $Q(x)$ над $\mathbb{C}[x]$, что справедливо равенство

$$S^{-1}\left\|\begin{matrix} E_{n-t} & 0 \\ \overline{A}(x) & \varepsilon(x)E_t\end{matrix}\right\|=\left\|\begin{matrix} E_{n-t} & 0 \\ \overline{B}(x) & \varepsilon(x)E_t\end{matrix}\right\|Q(x).$$

В последнем равенстве перейдем к взаимным матрицам

$$\left\|\begin{matrix} \varepsilon^t(x)E_{n-t} & 0 \\ -\varepsilon^{t-1}(x)\overline{A}(x) & \varepsilon^{t-1}(x)E_t\end{matrix}\right\|\left\|\begin{matrix} s_{11} & \dots & s_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ s_{n1} & \dots & s_{nn}\end{matrix}\right\|=$$

$$=\left\|\begin{matrix} r_{11}(x) & \dots & r_{1n}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ r_{n1}(x) & \dots & r_{nn}(x)\end{matrix}\right\|\left\|\begin{matrix} \varepsilon^t(x)E_{n-t} & 0 \\ -\varepsilon^{t-1}(x)\overline{B}(x) & \varepsilon^{t-1}(x)E_t\end{matrix}\right\|,$$

откуда следуют соотношения

$$\|-\overline{A}(x)\ E_t\|\left\|\begin{matrix} s_{1n-t+1} & \dots & s_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ s_{nn-t+1} & \dots & s_{nn}\end{matrix}\right\|=\left\|\begin{matrix} r_{n-t+1\,n-t+1}(x) & \dots & r_{n-t+1\,n}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ r_{nn-t+1}(x) & \dots & r_{nn}(x)\end{matrix}\right\|, \quad (3)$$

$$\|-\overline{A}(x)\ E_t\|\left\|\begin{matrix} s_{1i} \\ \dots \\ s_{ni}\end{matrix}\right\|=\left\|\begin{matrix} r_{n-t+1\,i}(x) \\ \dots \\ r_{ni}(x)\end{matrix}\right\|\varepsilon(x)+$$

$$+\left\|\begin{matrix} r_{n-t+1\,n-t+1}(x) & \dots & r_{n-t+1\,n}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ r_{nn-t+1}(x) & \dots & r_{nn}(x)\end{matrix}\right\|\left\|\begin{matrix} -b_{1i}(x) \\ \dots \\ -b_{ti}(x)\end{matrix}\right\|,\quad i=\overline{1,\ n-t}. \quad (4)$$

Из равенств (3), (4) получаем

$$\| -\overline{A}(x)\ E_t \| \begin{Vmatrix} s_{1i} \\ \cdots \\ s_{ni} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} r_{n-t+1i}(x) \\ \cdots\cdots \\ r_{ni}(x) \end{Vmatrix} \varepsilon(x) +$$

$$+ \| -\overline{A}(x)\ E_t \| \begin{Vmatrix} s_{1n-t+1} & \ldots & s_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{nn-t+1} & \ldots & s_{nn} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} -b_{1i}(x) \\ \cdots\cdots \\ -b_{ti}(x) \end{Vmatrix}, \quad i = \overline{1,\ n-t}. \tag{5}$$

Легко видеть, что

$$\| -\overline{A}(x)\ E_t \| \begin{Vmatrix} s_{1n-t+1} & \ldots & s_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{nn-t+1} & \ldots & s_{nn} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} -b_{1i}(x) \\ \cdots\cdots \\ -b_{ti}(x) \end{Vmatrix} =$$

$$= (\| -b_{1i}(x)\ \ldots\ -b_{ti}(x) \| \otimes \| -\overline{A}(x)\ E_t \|) \begin{Vmatrix} s_{1n-t+1} \\ \cdots \\ s_{nn-t+1} \\ \cdots \\ s_{1n} \\ \cdots \\ s_{nn} \end{Vmatrix}.$$

Составив матрицы значений левой и правой частей равенства (5) на системе корней многочлена $\varepsilon(x)$, используя предложение 1 работы [2], получаем систему $n-t$ равенств

$$M_{\| -\overline{A}(x) E_t \|}(\varepsilon) \begin{Vmatrix} s_{1i} \\ \cdots \\ s_{ni} \end{Vmatrix} =$$

$$= M_{\| -b_{1i}(x) \ldots -b_{ti}(x) \| \otimes \| -\overline{A}(x) E_t \|}(\varepsilon) = \begin{Vmatrix} s_{1n-t+1} \\ \cdots \\ s_{nn-t+1} \\ \cdots \\ s_{1n} \\ \cdots \\ s_{nn} \end{Vmatrix}, \quad i = \overline{1,\ n-t}.$$

Это значит, что уравнение (1) имеет решение $\| s_{11} \ldots s_{n1} \ldots s_{1n} \ldots s_{nn} \|^T$, удовлетворяющее условию (2).

Достаточность. Из существования решения уравнения (1), удовлетворяющего условию (2), следует равенство

$$\| -\overline{A}(x)\ E_t \| \begin{Vmatrix} s_{1i} \\ \cdots \\ s_{ni} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} y_{n-t+1i}(x) \\ \cdots\cdots \\ y_{ni}(x) \end{Vmatrix} \varepsilon(x) +$$

$$+ (\| -b_{1i}(x)\ \ldots\ -b_{ti}(x) \| \otimes \| -\overline{A}(x)\ E_t \|) \begin{Vmatrix} s_{1n-t+1} \\ \cdots \\ s_{nn-t+1} \\ \cdots \\ s_{1n} \\ \cdots \\ s_{nn} \end{Vmatrix}, \quad i = \overline{1,\ n-t},$$

а также равенство

$$\|-\bar{A}(x)\,E_t\|\,S=\|-\bar{A}(x)\,E_t\|\begin{Vmatrix} s_{1n-t+1} & \ldots & s_{1n}\\ \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\\ s_{nn-t+1} & \ldots & s_{nn}\end{Vmatrix}\times$$

$$\times\left\|\begin{array}{c:ccc} -b_{11}(x)\ldots-b_{1n-t}(x) & 1 & & 0\\ \ldots\ldots\ldots & & \ddots & \\ -b_{t1}(x)\ldots-b_{tn-t}(x) & 0 & & 1\end{array}\right\|+$$

$$+\left\|\begin{array}{ccc:ccc} y_{n-t+11}(x) & \ldots & y_{n-t+1n-t}(x) & 0 & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ y_{n1}(x) & \ldots & y_{nn-t}(x) & 0 & \ldots & 0\end{array}\right\|\varepsilon(x). \tag{6}$$

Введем обозначение

$$\|-A(x)\,E_t\|\begin{Vmatrix} s_{1n-t+1} & \ldots & s_{1n}\\ \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\\ s_{nn-t+1} & \ldots & s_{nn}\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} y_{n-t+1n-t+1}(x) & \ldots & y_{n-t+1n}(x)\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ y_{nn-t+1}(x) & \ldots & y_{nn}(x)\end{Vmatrix}=\bar{Y}(x).$$

Согласно предложениям 1 и 2 из работы [2], имеем

$$M_{\|-\bar{A}(x)E_t\|S}(\varepsilon)=M_{\|-\bar{A}(x)E_t\|}(\varepsilon)\,S,$$

$$M_{\bar{Y}(x)\left\|\begin{array}{c:ccc} -b_{11}(x)\ldots-b_{1n-t}(x) & 1 & & 0\\ \ldots\ldots & & \ddots & \\ -b_{t1}(x)\ldots-t_{tn-t}(x) & 0 & & 1\end{array}\right\|}(\varepsilon)=\begin{Vmatrix} Y_{k_1}(\alpha_1) & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & Y_{k_p}(\alpha_p)\end{Vmatrix}M_{\|-\bar{B}(x)E_t\|}(\varepsilon),$$

где $\varepsilon(x)=(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\ldots(x-\alpha_p)^{k_p}$;

$$Y_{k_\nu}(\alpha_\nu)=\begin{Vmatrix} \bar{Y}(\alpha_\nu) & & & 0\\ \bar{Y}'(\alpha_\nu) & \bar{Y}(\alpha_\nu) & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \\ \bar{Y}^{(k_\nu-1)}(\alpha_\nu) & \binom{k_\nu-1}{1}\bar{Y}^{(k_\nu-2)}(\alpha_\nu) & \ldots & \bar{Y}(\alpha_\nu)\end{Vmatrix},\quad \nu=\overline{1,\,p}$$

— неособенная матрица. Учитывая эти соотношения, из равенства (6) получаем

$$M_{\|-\bar{A}(x)E_t\|}(\varepsilon)\,S=\begin{Vmatrix} Y_{k_1}(\alpha_1) & & \\ & \ddots & 0\\ 0 & & Y_{k_p}(\alpha_p)\end{Vmatrix}M_{\|-\bar{B}(x)E_t\|}(\varepsilon).$$

Так как $\operatorname{rang} M_{\|-\bar{A}(x)E_t\|}(\varepsilon)=\operatorname{rang} M_{\|-\bar{B}(x)E_t\|}(\varepsilon)=n$, то S — неособенная матрица.

Рассмотрим уравнение

$$\begin{Vmatrix} \varepsilon(x)\,E_{n-t} & 0\\ -\bar{A}(x) & E_t\end{Vmatrix}S=Y(x)\begin{Vmatrix} \varepsilon(x)\,E_{n-t} & 0\\ -\bar{B}(x) & E_t\end{Vmatrix}, \tag{7}$$

где матрица $Y(x)$ имеет вид

$$Y(x)=\begin{Vmatrix} Y_1(x)\\ y_{n-t+11}(x)\ldots y_{n-t+1n}(x)\\ \ldots\ldots\ldots\\ y_{n1}(x)\quad\ldots\quad y_{nn}(x)\end{Vmatrix}.$$

Из равенства рангов и инвариантных многочленов матриц

$$\left\| \begin{matrix} \varepsilon(x) E_{n-t} & 0 \\ -\overline{B}(x) & E_t \end{matrix} \right\|, \quad \left\| \begin{matrix} \varepsilon(x) E_{n-t} & 0 \\ -\overline{B}(x) & E_t \\ s_{11}\varepsilon(x) & \ldots \; s_{1n}\varepsilon(x) \\ \cdots & \cdots \\ s_{n-t1}\varepsilon(x) & \ldots \; s_{n-tn}\varepsilon(x) \end{matrix} \right\|$$

следуют существование и единственность матрицы $Y_1(x)$. Теперь равенство определителей левой и правой частей уравнения (7) указывает на обратимость матрицы $Y(x)$, что приводит к подобию матриц $A(x)$ и $B(x)$. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. При выполнении условий теоремы 1 матрица H такая, что $A(x) = HB(x)H^{-1}$, и имеет вид

$$H = C_1^{-1} \left\| \begin{matrix} s_{11} & \ldots & s_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{n1} & \ldots & s_{nn} \end{matrix} \right\| C_2, \quad s_{ij} \in \mathbb{C}.$$

Доказательство этой теоремы проводится с использованием теоремы 3 и следствия 2 работы [3].

1. *Казимирский П. С.* Решение проблемы выделения регулярного множителя из матричного многочлена.— Укр. мат. журн., 1980, 32, № 4, с. 483—498.
2. *Казімірський П. С.* Квазіунітальні та супровідні матриці матричних многочленів.— У кн.: Теоретичні та прикладні питання алгебри і диференціальних рівнянь. К. : Наук. думка, 1977, с. 29—52.
3. *Казімірський П. С., Петричкович В. М.* Про еквівалентність поліноміальних матриць.— Там же, с. 61—66.
4. *Казимирский П. С., Шаваровский Б. З.* К подобию матричных многочленов.— В кн.: XVI Всесоюз. алгебр. конф. (Л., сент. 1981 г.) : Тез. докл.: Л., 1981, ч. 2, с. 63—64.
5. *Ланкастер П.* Теория матриц.— М. : Наука, 1978.— 280 с.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
14.10.81

УДК 517.524

Д. И. Боднар, Х. И. Кучминская

АБСОЛЮТНАЯ СХОДИМОСТЬ ЧЕТНОЙ И НЕЧЕТНОЙ ЧАСТИ ДВУМЕРНОЙ СООТВЕТСТВУЮЩЕЙ ЦЕПНОЙ ДРОБИ

Разложение функций в соответствующие цепные дроби является одним из наиболее употребляемых способов построения ее дробно-рациональных приближений [7]. При исследовании сходимости соответствующих цепных дробей с комплексными компонентами существенно используется представление их подходящих дробей в виде произведения дробно-линейных отображений [8]

$$\frac{P_n}{Q_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i\,|}{|\,b_i} = t_1 t_2 \ldots t_n(0), \quad t_i(w) = \frac{a_i}{b_i + w}.$$

Такое представление дало возможность Стилтьесу построить четную и нечетную части цепной дроби [5], на основании которых было введено понятие фундаментальных неравенств [8].

Определение 1. Четной (нечетной) частью дроби

$$\frac{1\,|}{|\,1} + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{a_i\,|}{|\,1} \tag{1}$$

называется дробь, подходящие дроби которой совпадают с четными [нечетными] подходящими дробями дроби (1).