3. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы.— М. : Наука, 1969.— 400 с.
4. *Тимошенко С. Г.* Колебания в инженерном деле.— М. : Физматгиз, 1959.— 440 с.
5. *Hadeler K. P.* Uber Operatorgleichungen mit nicht linear auftretendem Parameters.— ZAMM, 1967, 47, N 2, с. 91—96.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
08.06.81

УДК 517.63

Я. Д. Пяныло, О. В. Побережный

О ПОГРЕШНОСТИ ПРИБЛИЖЕННОГО ОБРАЩЕНИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА С ПОМОЩЬЮ МНОГОЧЛЕНОВ ЯКОБИ

Вопросам оценки погрешности и условиям сходимости приближенного обращения преобразования Лапласа с помощью ортогональных многочленов посвящены работы [1—4]. В работах [1, 2] предполагались достаточно жесткими условия на оригинал и его изображение по Лапласу, в работах [3, 4] получена оценка погрешности сверху. В настоящей статье для определенного класса оригиналов получена асимптотическая формула для погрешности приближенного обращения преобразования Лапласа с помощью многочленов Якоби.

Теорема. Пусть непрерывно дифференцируемая функция обладает свойствами

$$f(t) \approx \begin{cases} A + Bt^{\gamma} e^{-ut^{\nu}} \ln^{q} t, & t \to 0, \\ C + Dt^{\delta} e^{-vt} \ln^{s} t, & t \to \infty, \end{cases} \tag{1}$$

где A, C, γ, δ, v, q, s — произвольные числа; B, $D \neq 0$; u, $v \geqslant 0$; $t \in [0, \infty)$. Тогда для достаточно больших N справедлива формула

$$\Delta f_N(t) = f(t) - f_N(t) \approx \frac{2}{\pi} \sin^{-i_0} \varphi \cos^{-k_0} \varphi \left\{ - \frac{\sin(2M\varphi + \eta_0)}{\sin \varphi} [A\Gamma(1 + i_0) \times \right.$$
$$\times (2M)^{-(1+i_0)} \sin \alpha\pi + B\sigma^{-\gamma} \Phi(M)] + (-1)^N \frac{\cos(2M\varphi + \eta_0)}{\cos \varphi} \Big[C\Gamma(1 + k_0) \times$$
$$\times (2M)^{-(1+k_0)} \sin\left(\beta - \frac{\gamma_0}{\sigma}\right)\pi + D\left(\frac{2R_1}{\sigma}\right)^{\delta} \Gamma(1 + k) R_2^s (2M)^{-(1+k)} \times$$
$$\left. \times \left(\sin \eta - \frac{\psi(1 + k)}{R_1} \left(\delta \sin(\eta - \varphi_1) + \frac{s}{R_2} \sin(\eta - \varphi_1 - \varphi_2) \right) \right) \Big] \right\}, \tag{2}$$

$$\alpha < \min\left\{ \frac{3}{2}, \ 2\gamma + \frac{3}{2} \right\}, \quad \beta < \begin{cases} 2\gamma_0/\sigma - {}^1/_2, & C \neq 0, \\ 2(\gamma_0 + v)/\sigma - {}^1/_2, & C = 0. \end{cases}$$

Здесь введены обозначения: $\psi(x) = \Gamma'(x)/\Gamma(x)$;

$$\Phi(M) = \begin{cases} \Gamma(1 + i_1) R_3^q (2M)^{-(1+i_1)} \left[\sin \eta_1 + \frac{2q}{R_3} \psi(1 + i_1) \sin(\eta_1 - \varphi_3) \right], & u = 0, \\ \mu_1^{1+i_1} R_4^q \sqrt{\frac{2\pi}{\mu_2(1 + 2\omega)}} \exp\left[-\mu_2 \frac{1 + 2\omega}{2\omega} \cos \frac{\omega\pi}{1 + 2\omega} \right] \cos \eta_3, & u > 0; \end{cases}$$

$$t = -\frac{2}{\sigma} \ln \cos \varphi; \quad 2M = 2N + \alpha + \beta + 2; \quad i_0 = \frac{1}{2} - \alpha;$$

$$k_0 = \frac{2\gamma_0}{\sigma} - \beta - \frac{3}{2}; \quad i_1 = 2\gamma + i_0; \quad k = \frac{2v}{\sigma} + k_0; \quad \omega = -\nu;$$

$$\eta_0 = -(1 + 2\alpha)\frac{\pi}{4}; \quad \eta = \left(\beta - \frac{\gamma_0 + v}{\sigma}\right)\pi + \delta\varphi_1 + s\varphi_2;$$
$$\eta_1 = (\alpha - \gamma)\pi - q\varphi_3; \quad \mu_1 = \left(2u\omega \frac{\sigma^{\omega}}{2M}\right)^{\frac{1}{1+2\omega}}; \tag{3}$$
$$\mu_2 = [2u\omega\sigma^{\omega}(2M)^{2\omega}]^{\frac{1}{1+2\omega}}; \quad \eta_3 = \left(\gamma - \alpha + \frac{1}{2}\right)\pi +$$

$$+ (2\gamma - \alpha + 1) \frac{\omega\pi}{1+2\omega} + q\varphi_4 - \mu_2 \frac{1+2\omega}{2\omega} \sin \frac{\omega\pi}{1+2\omega};$$

$$R_1 = \sqrt{\ln^2 2M + \frac{\pi^2}{4}}; \quad \varphi_1 = \arcsin \frac{\pi}{2R_1}; \quad R_2 = \sqrt{\ln^2 \frac{2R_1}{\sigma} + \varphi_1^2};$$

$$\varphi_2 = \arcsin \frac{\varphi_1}{R_2}; \quad R_3 = \sqrt{\ln^2 (4M^2\sigma) + \pi^2}; \quad \varphi_3 = \arcsin \frac{\pi}{R_3};$$

$$R_4 = \sqrt{\ln^2 \frac{\mu_1^2}{\sigma} + \left(1 + \frac{2\omega}{1+2\omega}\right)^2 \pi^2}; \quad \varphi_4 = \arcsin \left[\left(1 + \frac{2\omega}{1+2\omega}\right) \frac{\pi}{R_4}\right];$$

$f_N(t)$ — N-я частичная сумма ряда разложения оригинала по смещенным многочленам Якоби и изображение Лапласа $F(p)$ от $f(t)$ есть аналитическая функция в полуплоскости $\operatorname{Re} p \geqslant \gamma_0$.

Доказательство. Обозначим

$$\Delta f_{NK}(t) = f_{N+K}(t) - f_N(t) = h(t) \sum_{n=N}^{N+K} \frac{a_n}{\sqrt{r_n}} P_n^{*(\alpha,\beta)}(e^{-\sigma t}), \tag{4}$$

где

$$h(t) = \exp[-\sigma t(1 + \beta - \gamma_0/\sigma)] [1 - \exp(-\sigma t)]^{\alpha};$$

$$r_n = \Gamma(n + \alpha + 1)\Gamma(n + \beta + 1)/(n!\,\Gamma(n + \alpha + \beta + 1)(2n + \alpha + \beta + 1));$$

$P_n^{*(\alpha,\beta)}(x)$ — присоединенные многочлены Якоби. Очевидно, справедливо равенство

$$\lim_{K\to\infty} \Delta f_{NK}(t) = \Delta f_N(t) = f(t) - f_N(t). \tag{5}$$

Используя интегральное представление для a_n и формулу Кристоффеля — Дарбу [5], легко показать, что

$$f_N(t) = 2^{\alpha+\beta+1} h(t) \int_0^{\pi} f\left(-\frac{2}{\sigma} \ln \cos \frac{\theta}{2}\right) K_N^{(\alpha,\beta)}(\theta, \varphi) \sin \frac{\theta}{2} \cos^{\frac{2\gamma_0}{\sigma}-1} \frac{\theta}{2}\, d\theta. \tag{6}$$

Здесь

$$K_N^{(\alpha,\beta)}(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{r_n} P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\varphi) P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta). \tag{7}$$

Известно [5], что для больших N, $0 < \theta$, $\varphi < \pi$ выполняется асимптотическая формула

$$K_N^{(\alpha,\beta)}(\theta, \varphi) \approx 2^{-\alpha-\beta-2} k(\theta) k(\varphi) \left\{\frac{\sin[M(\varphi+\theta) + 2\eta_0]}{\sin \frac{\varphi+\theta}{2}} + \frac{\sin[M(\varphi-\theta)]}{\sin \frac{\varphi-\theta}{2}}\right\}, \tag{8}$$

где $k(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\sin \frac{x}{2}\right)^{-\alpha-\frac{1}{2}} \left(\cos \frac{x}{2}\right)^{-\beta-\frac{1}{2}}$. Учитывая формулы (8) и (6), из равенства (4) находим

$$\Delta f_{NK}(t) \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}} k(2\varphi) h(t) \operatorname{Re} \left\{e^{-2\lambda\varphi i} \int_0^{\pi/2} e^{2\lambda\theta i} f\left(-\frac{2}{\sigma} \ln\cos\theta\right) \times \right.$$

$$\times \frac{\sin[K(\theta-\varphi)]}{\sin(\theta-\varphi)} \sin^{l_0}\theta \cos^{k_0}\theta d\theta + e^{(2\lambda\varphi+2\eta_0)i} \int_0^{\pi/2} e^{2\lambda\theta i} f\left(-\frac{2}{\sigma} \ln\cos\theta\right) \times$$

$$\left. \times \frac{\sin[K(\theta+\varphi)]}{\sin(\theta+\varphi)} \sin^{l_0}\theta \cos^{k_0}\theta d\theta \right\}, \quad 2\lambda = 2M + K + 1. \tag{9}$$

Переходя в выражении (9) к пределу при $K \to \infty$, используя при этом лемму Римана [6], получаем

$$\Delta f_N(t) \approx -\frac{2}{\sqrt{\pi}} k(2\varphi) h(t) \operatorname{Re} \left\{\frac{1}{i} e^{(2M+1)\varphi i + 2\eta_0 i} \times \right.$$

$$\times \int\limits_0^{\pi/2} e^{(2M+1)\theta i} f\left(-\frac{2}{\sigma}\ln\cos\theta\right)\frac{\sin^{l_0}\theta\cos^{k_0}\theta}{\sin(\theta+\varphi)}\,d\theta +$$

$$+\frac{1}{i}e^{-(2M+1)\varphi i}\int\limits_0^{\pi/2} e^{(2M+1)\theta i} f\left(-\frac{2}{\sigma}\ln\cos\theta\right)\frac{\sin^{l_0}\theta\cos^{k_0}\theta}{\sin(\theta-\varphi)}\,d\theta\Bigg\}. \qquad (10)$$

Если в равенстве (10) известными методами [3, 4] найти асимптотические разложения интегралов, сохранив первые члены этих разложений, то придем к соотношению (2).

Полученная формула дает возможность судить о скорости сходимости $f_N(t)$ и $f(t)$ и может быть использована для выбора чисел удерживаемых членов приближенного ряда.

1. *Крылов В. И., Скобля Н. С.* Об условиях сходимости и оценке погрешности приближенного обращения преобразования Лапласа при помощи рядов Фурье.— Докл. АН БССР, 1967, **11**, № 9, с. 763—766.
2. *Крылов В. И., Скобля Н. С.* Замечание о сходимости и оценке погрешности приближенного обращения преобразования Лапласа при помощи ортогональных многочленов Лежандра и Якоби.— Там же, № 10, с. 863—866.
3. *Побережный О. В., Пяныло Я. Д.* Об использовании численного обращения преобразования Лапласа к нестационарным задачам термоупругости для тел с трещинами.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1978, вып. 8, с. 45—48.
4. *Побережный О. В., Пяныло Я. Д.* Об оценке погрешности и условиях сходимости приближенного обращения преобразования Лапласа с помощью ортогональных многочленов.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1980, вып. 12, с. 91—94.
5. *Сеге Г.* Ортогональные многочлены.— М. : Физматгиз, 1962.— 500 с.
6. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3-х т.— М. : Наука, 1969.— Т. 3. 656 с.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
29.04.81

УДК 512.8

В. М. Петричкович, В. М. Прокип

ОБ ОБЩИХ ДЕЛИТЕЛЯХ МАТРИЧНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

Пусть P — поле, а $P_{k,l}$ — совокупность $k \times l$-матриц над P. Пусть, далее,

$$A(x) = A_0x^p + A_1x^{p-1} + \cdots + A_p,$$
$$B(x) = B_0x^q + B_1x^{q-1} + \cdots + B_q,$$

$A_i, B_j \in P_{n,n}$ $(i = 0, 1, \ldots, p;\ j = 0, 1, \ldots, q)$ — два матричных регулярных многочлена $(|A_0| \neq 0,\ |B_0| \neq 0)$. Исследуем вопрос об общих делителях матричных многочленов $A(x)$ и $B(x)$ и установим необходимое и одно достаточное условия существования общего линейного унитального делителя этих многочленов.

В работе [1] приведены условия существования общих собственного значения и соответствующего ему собственного вектора регулярных матричных многочленов $A(x)$ и $B(x)$, коэффициенты которых $A_i, B_j \in C_{n\,n}$ $(i = 0, 1 \ldots p;$ $j = 0, 1, \ldots, q)$.

Рассмотрим матричные уравнения

$$XA = B, \qquad (1)$$
$$YC = D, \qquad (2)$$

где $A \in P_{r,l}$; $B \in P_{n,l}$; $C \in P_{r,k}$; $D \in P_{n,k}$; $X, Y \in P_{n,r}$ и X, Y неизвестны.

Лемма 1. Матричные уравнения (1), (2) имеют общее решение тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{rang}\begin{Vmatrix} A & C \\ B & D \end{Vmatrix} = \operatorname{rang}\|A \quad C\|.$$

Доказательство. Через x_i, y_i, b_i, d_i обозначим i-е строки матриц X, Y, B, D соответственно. Тогда из уравнений (1), (2) можно записать n пар