1. *Берник В. И., Пташник Б. И., Салыга Б. О.* Аналог многоточечной задачи для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами.— Дифференц. уравнения, 1977, 13, № 4, с. 637—645.
2. *Берс Л., Джон Ф., Шехтер М.* Уравнения с частными производными.— М. : Мир, 1966.— 351 с.
3. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений.— М. : Физматгиз, 1958.— 274 с.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
16.12.81

УДК 517.946

М. С. Волошина, А. С. Гупало, Г. П. Лопушанская

ОБОБЩЕННАЯ ЗАДАЧА НЕЙМАНА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА СИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В СЛУЧАЕ МНОГОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ

При решении основных граничных задач для уравнений и систем эллиптического типа методом приведения к интегральным уравнениям [6] в случае, когда рассматриваемая в граничной задаче область многосвязна, получаемые интегральные уравнения, как правило, решаются по третьей теореме Фредгольма. В работе [7] изложен метод, с помощью которого можно заменить получаемые интегральные уравнения другими, но решаемыми по первой теореме Фредгольма, а в работе [1] этот метод применен к решению в многосвязных областях задач Дирихле и Неймана для сильно эллиптической системы дифференциальных уравнений второго порядка. В настоящей статье для самосопряженной системы уравнений Эйлера

$$\sum_{k,l=1}^{n} A_{kl} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_k \partial x_l} = 0, \qquad (1)$$

соответствующей основной вариационной задаче для положительно определенного функционала

$$\int_V \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial u'(x)}{\partial x_k} A_{kl} \frac{\partial u(x)}{\partial x_l}\, dx \geqslant \gamma^2 \int_V \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial u'(x)}{\partial x_k} \frac{\partial u(x)}{\partial x_l}\, dx,$$

где $A_{kl} = A_{lk} = A'_{kl}$ (штрих обозначает транспонирование) — постоянные квадратные матрицы порядка p; V — некоторая область в R^n, $n \geqslant 3$; γ — действительное число, рассматривается задача Неймана, когда на границе области задана обобщенная вектор-функция. Задача Дирихле в многосвязной области с обобщенными граничными данными рассматривалась в работах [2, 3].

Пусть Ω — область в R^n, $n \geqslant 3$, ограниченная замкнутыми n — 1-мерными поверхностями $S_0, S_1, \ldots, S_m$ класса C^∞, непересекающимися между собой, причем S_0 содержит внутри себя остальные поверхности или отсутствует. Обозначим через $S = \bigcup_{l=0}^{m} S_l$ полную границу области Ω. Считаем, что существует такое положительное число ε_1, что поверхность S_ε $(0 < \varepsilon < \varepsilon_1)$, расположенная на расстоянии ε по внутренней нормали к S, не имеет самопересечений. Через $[D(S)]^p$ обозначим пространство бесконечно дифференцируемых (основных) вектор-функций $\varphi(y) = (\varphi_1(y), \ldots, \varphi_p(y))$ на S, через $[D'(S)]^p$ — пространство линейных непрерывных функционалов над $[D(S)]^p$ (обобщенных вектор-функций $F = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_p \end{pmatrix}$), через $\langle \varphi, F\rangle$ — действие $F \in [D'(S)]^p$ на $\varphi \in [D(S)]^p$.

Согласно работе [5], $\langle \varphi, F\rangle = \sum_{i=1}^{p} \langle \varphi_i, F_i\rangle$, $\varphi_i \in D(S)$, $F_i \in D'(S)$. Пусть

$\omega_0\ (x,\ y)$ — фундаментальная матрица системы (1), $C^{\nu(x)}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) = -2\sum\limits_{k,l=1}^{n}\tilde{A}_{lk}\nu_l\ (x)\frac{\partial}{\partial z_k}$, $x \in S$ — граничный оператор типа Неймана; $\tilde{A}_{lk}$ определяются однозначно матрицами A^{lk} [1].

Постановка задачи. Пусть $F \in [D'\ (S)]^p$. В области Ω найти решение $u\ (x)$ системы (1), удовлетворяющее условию

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{S_\varepsilon}\varphi\,(x_\varepsilon)\,C^{(\nu(x))}\left(\frac{\partial}{\partial x_\varepsilon}\right)u\,(x_\varepsilon)\,dS_\varepsilon = \langle\varphi,\ F\rangle \tag{2}$$

для каждой $\varphi \in [D\ (S)]^p$ и, если S_0 отсутствует, условию на бесконечности $u\,(x) = O\,(|\,x\,|^{2-n}),\ |\,x\,| \to \infty$. Здесь $\varphi\ (x_\varepsilon) = \varphi\ (x)$, если $x_\varepsilon = x + \varepsilon\nu\ (x)$, $x \in S$; $\nu\ (x)$ — орт внутренней нормали к S в точке x.

Пусть $[D_1'\ (S)]^p = \{T : T \in [D'\ (S)]^p,\ \langle E,\ T\rangle = 0\}$, E — единичная матрица порядка p.

Лемма 1. Для существования решения обобщенной задачи Неймана в многосвязной конечной области (при наличии поверхности S_0) необходимо, чтобы $F \in [D_1'\ (S)]^p$.

Согласно работе [1], для любого решения $u\ (x)$ системы (1)

$$\int\limits_{S_\varepsilon}C^{(\nu(x))}\left(\frac{\partial}{\partial x_\varepsilon}\right)u\,(x_\varepsilon)\,dS_\varepsilon = 0,$$

поэтому, заменяя в условии (2) вектор-функцию $\varphi\ (x)$ матрицей E, получаем утверждение леммы 1.

Лемма 2. Для каждой функции $\varphi \in [D\ (S)]^p$ равномерно относительно $y \in S$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{S_\varepsilon}\varphi\,(x_\varepsilon)\,C^{(\nu(x))}\left(\frac{\partial}{\partial x_\varepsilon}\right)\omega_0\,(x_\varepsilon,\ y)\,dS_\varepsilon = -\varphi\,(y) + \int\limits_{S}\varphi\,(x)\,C^{(\nu(x))}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\omega_0\,(x,\ y)\,dS.$$

Лемма 3. Оператор $(B\varphi)\,(y) = \int\limits_{S}\varphi\,(x)\,C^{(\nu(x))}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\omega_0\,(x,\ y)\,dS$ действует в пространстве $[D\ (S)]^p$.

Лемма 4. Преобразование

$$\langle g,\ T\rangle = \langle\varphi_g,\ F\rangle, \tag{3}$$

где $g \in [D\ (S)]^p$; φ_g — решение системы интегральных уравнений

$$-\varphi\,(y) + \int\limits_{S}\varphi\ (x)\left[C^{(\nu(x))}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\omega_0\,(x,\ y) + \rho\right]dS = g\,(y); \tag{4}$$

ρ — произвольно выбранная постоянная матрица; $\det\rho \neq 0$, определяет изоморфизм пространства $[D_1'\ (S)]^p$ на себя. Обратное преобразование определяется таким образом:

$$\langle\varphi,\ F\rangle = \left\langle -\varphi\,(y) + \int\limits_{S}\varphi\,(x)\,C^{(\nu(x))}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\omega_0\,(x,\ y)\,dS,\ T\right\rangle,\quad \varphi \in [D\,(S)]^p. \tag{5}$$

Лемма 5. Если поверхность S_0 отсутствует, т. е. $S = \bigcup\limits_{i=1}^{m} S_i$, то преобразование вида (3), где для произвольной функции $g \in [D\ (S)]^p$ φ_g — решение системы интегральных уравнений

$$-\varphi\,(y) + \int\limits_{S}\varphi\,(x)\,C^{(\nu(x))}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\omega_0\,(x,\ y)\,dS = g\,(y), \tag{6}$$

определяет изоморфизм пространства $[D'\ (S)]^p$ на себя. Обратное преобразование определяется формулой (5).

Утверждения лемм 4 и 5 следуют из леммы 3 и однозначной разрешимости систем интегральных уравнений (4), (6) [1].

Теорема 1. Пусть $F \in [D_1'(S)]^p$, обобщенная вектор-функция T определена согласно формулам (3), (4). Тогда вектор-функция

$$u(x) = \langle \omega_0(x, y), T \rangle, \quad x \in \Omega, \quad y \in S \tag{7}$$

является единственным (с точностью до произвольного постоянного столбца) решением обобщенной задачи Неймана для системы (1) в конечной многосвязной области Ω с границей $S = \bigcup_{i=0}^{m} S_i$.

Очевидно, что произвольный постоянный столбец является решением задачи, вектор-функция (7) удовлетворяет системе (1) в области Ω. Покажем, что она удовлетворяет граничному условию (2).

Подставляя выражение (7) в (2) и используя леммы 3 [2], 2, 4, получаем

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{S_\varepsilon} \varphi(x_\varepsilon) C^{(\nu(x))}\left(\frac{\partial}{\partial x_\varepsilon}\right) u(x_\varepsilon)\, dS_\varepsilon = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{S_\varepsilon} \varphi(x_\varepsilon) C^{(\nu(x))}\left(\frac{\partial}{\partial x_\varepsilon}\right) \langle \omega_0(x_\varepsilon, y), T\rangle\, dS_\varepsilon =$$

$$= \left\langle \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{S_\varepsilon} \varphi(x_\varepsilon) C^{(\nu(x))}\left(\frac{\partial}{\partial x_\varepsilon}\right) \omega_0(x_\varepsilon, y)\, dS_\varepsilon, T \right\rangle =$$

$$= \left\langle -\varphi(y) + \int_S \varphi(x) C^{(\nu(x))}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \omega_0(x, y)\, dS, T \right\rangle = \langle \varphi, F\rangle$$

для каждой функции $\varphi \in [D(S)]^p$.

Для доказательства единственности решения задачи предположим, что $u_1(x)$, $u_2(x)$ — два ее решения. Тогда вектор-функция $u(x) = u_1(x) - u_2(x)$ удовлетворяет в области Ω системе (1) и граничному условию

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{S_\varepsilon} \varphi(x_\varepsilon) C^{(\nu(x))}\left(\frac{\partial}{\partial x_\varepsilon}\right) u(x_\varepsilon)\, dS_\varepsilon = 0 \quad \forall \varphi \in [D(S)]^p$$

или после преобразования $x_\varepsilon = x + \varepsilon\nu(x)$, $x \in S$ с якобианом $w_\varepsilon(x)$ условию

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_S \varphi(x) v_\varepsilon(x)\, dS = 0 \quad \forall \varphi \in [D(S)]^p, \tag{8}$$

где

$$v_\varepsilon(x) = C^{(\nu(x))}\left(\frac{\partial}{\partial x_\varepsilon}\right) u(x_\varepsilon) w_\varepsilon(x) \big|_{x_\varepsilon = x + \varepsilon\nu(x)}.$$

Из результатов работы [1] следует, что каждое решение системы (1) в области Ω можно представить в виде

$$u(z) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{S_\varepsilon} \omega_0(z, y_\varepsilon) \mu_\varepsilon(y_\varepsilon)\, dS_\varepsilon + C, \tag{9}$$

где C — произвольный постоянный столбец; $\mu_\varepsilon(y_\varepsilon)$ — решение системы интегральных уравнений

$$-\mu_\varepsilon(x_\varepsilon) + \int_{S_\varepsilon} \left[C^{(\nu(x))}\left(\frac{\partial}{\partial x_\varepsilon}\right) \omega_0(x_\varepsilon, y_\varepsilon) + \rho\right] \mu_\varepsilon(y_\varepsilon)\, dS_\varepsilon = C^{(\nu(x))}\left(\frac{\partial}{\partial x_\varepsilon}\right) u(x_\varepsilon).$$

Подставляя решение этой системы в решение (9), после ряда преобразований получаем

$$u(z) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_S \Phi_\varepsilon(z, x) v_\varepsilon(x)\, dS + C, \quad z \in \Omega$$

с некоторой матрицей $\Phi_\varepsilon(z, x)$ основных функций. Отсюда, согласно лемме из работы [4],

$$u(z) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_S \Phi(z, x) v_\varepsilon(x)\, dS + C, \quad z \in \Omega$$

($\Phi(z, x) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \Phi_\varepsilon(z, x)$ — матрица основных функций), а с учетом условия (8) $u(z) = C$, $z \in \Omega$, а значит, $u_1(z) = u_2(z) + C$, $z \in \Omega$.

Теорема 2. Пусть $F \in (D'(S))^p$, обобщенная вектор-функция T определена согласно формулам (3), (6). Тогда вектор-функция (7) является единственным решением обобщенной задачи Неймана для системы (1) в неограниченной многосвязной области Ω с границей $S = \bigcup\limits_{i=1}^{m} S_i$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

Подобный результат справедлив для однородной сильноэллиптической системы дифференциальных уравнений второго порядка вариационного типа с переменными бесконечно дифференцируемыми коэффициентами при условии существования для нее фундаментальной матрицы во всем пространстве R^n.

1. *Волошина М. С.* Задачи Дирихле и Неймана для одного класса сильно эллиптических систем дифференциальных уравнений в случае многосвязной области.— Мат. физика, 1974, вып. 16, с. 71—81.
2. *Волошина М. С., Гупало Г. С., Лопушанська Г. П.* Про узагальнену задачу Діріхле для одного класу сильно еліптичних систем диференціальних рівнянь у випадку багатозв'язної області.— Вісн. Льв. ун-ту. Сер. мех.-мат.,1978, вип. 13, с. 5—8.
3. *Волошина М. С., Гупало А. С., Лопушанская Г. П.* Обобщенная задача Дирихле для одного класса сильно эллиптических систем дифференциальных уравнений в случае многосвязной области.— Мат. физика, 1979, вып. 25, с. 81—85.
4. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Пространства основных обобщенных функций.— М. : Физматгиз, 1958.— 307 с.
5. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений.— М. : Физматгиз, 1957.— 274 с.
6. *Лопатинский Я. Б.* Об одном способе приведения граничных задач для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям.— Укр. мат. журн., 1953, 5, с. 123—151.
7. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. Изд. 2-е.— М. : Физматгиз, 1962.— 599 с.

Львовский университет

Поступила в редколлегию 27.05.81

УДК 518 : 517.948

Я. Н. Пелех

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА

Многие задачи гидроакустики, автоматического управления, теории вязкоупругости приводят к нелинейным интегральным уравнениям Вольтерра второго рода. Поскольку решение таких уравнений в замкнутой форме можно получить в очень редких случаях, то возникает проблема построения приближенного решения этих задач. В данной статье строятся нелинейные методы типа Рунге — Кутта для численного интегрирования уравнения

$$f(x) = \int_a^x F[x, y, f(y)]\, dy, \quad x \in [a, b]. \tag{1}$$

Вопросам численного решения уравнения (1) посвящены работы [1—3], в которых предложены линейные методы Рунге — Кутта.

Формулы перехода от точки a к точке $a + h$. Разделим интервал $[a, b]$ на $(m - 1)$ частей длины $h = \frac{b-a}{m-1}$ и обозначим $x_i = a + (i - 1)h$ $(i = \overline{1, m})$, $f_i = f(x_i)$, причем $f(x_1) = 0$. Разложение искомого решения $f(x_2)$ в окрестности точки a в ряд Тейлора имеет вид

$$f_2 = hF + \frac{h^2}{2}[2F_x + F_y + FF_z] + \frac{h^3}{6}[3F_{xx} + 3F_{xy} + F_{yy} + 3FF_{xz} + 2FF_{yz} +$$

$$+ F^2F_{zz} + 2F_xF_z + F_yF_z + FF_z^2] + \frac{h^4}{24}[4F_{xxx} + 6F_{xxy} + 4F_{xyy} + 6FF_{xxz} +$$