Лемма 5.

Для любых $k, l, m \geqslant 0$

$$\sum_{\substack{i_1,\ldots,i_{2m+1} \\ i_p\neq i_q, p\neq q}} S_k^{(i_1\ldots i_{2m+1})} \frac{\partial^{2m+1}}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_{2m+1}}} S_l = 0,$$

$$\sum_{\substack{i_1,\ldots,i_{2m} \\ i_p\neq i_q, p\neq q}} \left(S_{k-m}^{(i_1,\ldots,i_{2m}} \frac{\partial^{2m}}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_{2m}}} S_l - S_{l-m}^{(i_1\ldots i_{2m})} \frac{\partial^{2m}}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_{2m}}} S_k \right) = 0.$$

1. *Ольшанецкий М. А., Переломов А. М.* Квантовые системы, связанные с системами корней, и радиальные части операторов Лапласа.— Функц. анализ и его прил., 1978, 12, вып. 2, с. 57—65.
2. *Переломов А. М.* Алгебраический подход к решению одномерной модели N взаимодействующих частиц.— Теорет. и мат. физика, 1971, № 6, с. 364—391.
3. *Пидкуйко С. М., Степин А. М.* О решении одного дифференциально-функционального уравнения.— Функц. анализ и его прил., 1976, 10, вып. 2, с. 84—85.
4. *Пидкуйко С. И.* Об одномерной интегрируемой задаче n тел.— Успехи мат. наук, 1978, 33, вып. 3, с. 185—186.
5. *Calogero F.* Solution of the one-dimensional N-body problem.— J. Math. Phys., 1971, 12, с. 419—436.
6. *Calogero F., Marcioro C., Ragnisco O.* Exact solution of the classical and quantal one-dimensional many-body problem.— Lett. nuovo cim., 1975, 13, с. 383—388.
7. *Cambardella P. J.* Exact results in many-body systems of interacting particles.— J. Math. Phys, 1975, p. 1172—1187.
8. *Olshanetsky M. A., Perelomov A. M.* Quantum completely integrable systems connected with semisimple Lie algebras.— Lett. Math. Phys., 1977, 2, p. 7—13.
9. *Sutherland B.* Exact results in many-body systems of interacting particles.— Phys. Rev. A, 1972, 5, p. 1372—1376.

Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию 03.03.81

УДК 530.12 : 531.51

Р. М. Пляцко

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ГРАВИТАЦИОННОГО УЛЬТРАРЕЛЯТИВИСТСКОГО СПИН-ОРБИТАЛЬНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

В общей теории относительности движение пробного тела, обладающего внутренним вращением (или, как часто говорят, пробного тела со спином), описывается уравнениями Папапетру [3]

$$\frac{D}{ds}\left(Mu^\lambda + u_\mu \frac{DS^{\lambda\mu}}{ds}\right) = -\frac{1}{2} u^\sigma S^{\mu\nu} R^\lambda_{\sigma\mu\nu}, \tag{1}$$

$$\frac{DS^{\lambda\mu}}{ds} + u^\lambda u_\sigma \frac{DS^{\mu\sigma}}{ds} - u^\mu u_\sigma \frac{DS^{\lambda\sigma}}{ds} = 0 \tag{2}$$

(M — масса пробного тела; $S^{\mu\nu}$ — тензор спина; $u^\lambda \equiv dx^\lambda/ds$ — 4-вектор скорости тела; $R^\lambda_{\sigma\mu\nu}$ — тензор кривизны; D/ds — ковариантная производная *) при некоторых дополнительных условиях на спин. Как установлено [1], эти уравнения при условии Пирани

$$S^{\mu\nu} u_\nu = 0 \tag{3}$$

в гравитационном поле Шварцшильда имеют физически разумные решения, согласно которым мировые линии пробного тела со спином в случае ультрарелятивистских скоростей его поступательного движения могут существенно отличаться от геодезических линий, т. е. от решений уравнений $Du^\mu/ds = 0$. В частности, обнаружено, что пробное тело со спином в поле Шварцшильда при определенных соотношениях между компонентами вектора спина и скорости тела может двигаться по круговым орбитам, плоскость

* Греческие индексы принимают значения от 1 до 4, латинские — 1, 2, 3.

которых не пересекает источник поля, а проходит вне его (зависающие круговые орбиты [1]).

Сильное отличие траекторий вращающегося и невращающегося пробных тел в гравитационном поле естественно связывать с проявлением специфической гравитационной спин-орбитальной силы (о неультрарелятивистском гравитационном спин-орбитальном взаимодействии, слабо отклоняющем траекторию вращающегося пробного тела от траектории невращающегося тела, см., например, [4]). При этом, если для 4-вектора силы, действующей на бесспиновое пробное тело единичной массы

$$F^{\mu} \equiv du^{\mu}/ds = -\Gamma^{\mu}_{\lambda\sigma}u^{\lambda}u^{\sigma} \tag{4}$$

в случае поля Шварцшильда в стандартных координатах $x^1 \equiv r$, $x^2 \equiv \theta$, $x^3 \equiv \varphi$, $x^4 \equiv t$, очевидным является следующее свойство: значения компонент F^{μ} в каждой точке траектории пробного тела не изменяются при изменении направления движения тела на противоположное (т. е. при замене $u^i \to -u^i$), то для спиновой силы

$$F^{\mu}_c \equiv du^{\mu}/ds + \Gamma^{\mu}_{\lambda\sigma}u^{\lambda}u^{\sigma}, \tag{5}$$

вид которой следует из уравнений Папапетру (1), (2), зависимость F^{μ}_c от изменения направления поступательного движения пробного тела (без изменения направления спина) далеко не очевидна. Действительно, вводя вместо тензора $S^{\mu\nu}$ 3-вектор спина S_i соотношением

$$S_i \equiv \frac{1}{2}\sqrt{-g}\,\varepsilon_{ikm}S^{km} \tag{6}$$

(ε_{ikm} — символ Леви — Чивиты, g — определитель метрического тензора) и используя (3), систему четырех уравнений (1) в произвольном гравитационном поле можно преобразовать к виду

$$\begin{gathered} M(u^1 + \Gamma^1_{\alpha\beta}u^{\alpha}u^{\beta}) - 2\left[\frac{(u^{\gamma} + \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}u^{\alpha}u^{\beta})(g_{4\gamma}S_{[2}u_{3]} - u_4 S_{[2}g_{3]\gamma})}{u_4\sqrt{-g}}\right]^{\cdot} - \\ - \frac{u^{\pi}}{u_4\sqrt{-g}}(\dot{u}^{\gamma} + \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}u^{\alpha}u^{\beta})(u_4\Gamma^1_{i\pi}g_{k\gamma} + 2u_i\Gamma^1_{\pi[k}g_{4]\gamma})\varepsilon^{ikm}S_m + \\ + \frac{u^{\pi}}{2u_4\sqrt{-g}}(u_4R^1_{\pi ik} + 2u_iR^1_{\pi k4})\varepsilon^{ikm}S_m = 0, \end{gathered} \tag{7}$$

$$\begin{gathered} M(\dot{u}^4 + \Gamma^4_{\alpha\beta}u^{\alpha}u^{\beta}) + \left[\frac{(\dot{u}^{\gamma} + \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}u^{\alpha}u^{\beta})g_{\gamma k}u_i\varepsilon^{ikm}S_m}{u_4\sqrt{-g}}\right]^{\cdot} - \\ - \frac{u^{\pi}}{u_4\sqrt{-g}}(\dot{u}^{\gamma} + \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}u^{\alpha}u^{\beta})(u_4\Gamma^4_{i\pi}g_{k\gamma} + 2u_i\Gamma^4_{\pi[k}g_{4]\gamma})\varepsilon^{ikm}S_m + \\ + \frac{u^{\pi}}{2u_4\sqrt{-g}}(u_4R^4_{\pi ik} + 2u_iR^4_{\pi k4})\varepsilon^{ikm}S_m = 0 \end{gathered} \tag{8}$$

(плюс два уравнения, отличающиеся от (7) циклической перестановкой свободных индексов 1, 2, 3), где точка обозначает обычное дифференцирование по параметру s, а квадратные скобки возле индексов — их альтернирование. Три независимых уравнения системы (2) в этом случае принимают вид [2]

$$u_4 S_i - \dot{u}_4 S_i + 2(\dot{u}_{[4}u_{i]} - u^{\pi}u_{\rho}\Gamma^{\rho}_{\pi[4}u_{i]})S_n u^n + 2S_m\Gamma^m_{\pi[4}u_{i]}u^{\pi} = 0. \tag{9}$$

Из (7) — (9) замечаем, что в выражения для u^{μ} войдут не только u^{μ}, но и $\ddot{u}^{\mu}$. Это усложняет ситуацию по сравнению со случаем бесспиновой силы (4).

Цель настоящей статьи — исследовать зависимость силы спин-орбитального взаимодействия (5) от изменения направления поступательного движения пробного тела со спином для конкретных частных движений — ультрарелятивистских зависающих круговых орбит в поле Шварцшильда.

Запишем отличные от нуля значения компонент метрического тензора для поля Шварцшильда в стандартных координатах r, θ, φ, t:

$$g_{11} = -\frac{1}{1-\frac{2m}{r}}, \quad g_{22} = -r^2 \sin^2\theta, \quad g_{33} = -r^2, \quad g_{44} = 1 - \frac{2m}{r}. \tag{10}$$

Рассмотрим в поле Шварцшильда решение системы уравнений Папапетру (1), (2) при условии Пирани (3), отличающееся при $s = 0$ от зависающей круговой орбиты противоположным направлением поступательного движения вращающегося пробного тела, т. е. решение со следующими начальными условиями:

$$\begin{gathered} u_0^1 = 0, \quad u_0^2 = 0, \quad u_0^3 = -u_k^3, \quad u_0^4 = u_k^4, \\ S_{10} = S_{1k}, \quad S_{20} = S_{2k}, \quad S_{30} = 0, \\ \dot S_{10} = 0, \quad \dot S_{20} = 0, \quad \dot S_{30} = 0, \end{gathered} \tag{11}$$

где индекс нуль обозначает значения величин в начальный момент $s = 0$; u_k^3, u_k^4, S_{1k}, S_{2k} — значения компонент 4-вектора скорости и 3-вектора спина на зависающей круговой орбите [1]:

$$\begin{gathered} u_k^3 = -\frac{Mr}{6S_{2k}\sin\theta}, \quad u_k^4 = \frac{Mr^2}{6\,|S_{2k}|}\left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1/2}(1+\alpha)^{1/2}, \\ \alpha \equiv \frac{36S_{2k}^2}{M^2r^4} \ll 1. \end{gathered} \tag{12}$$

Для координат пробного тела со спином также рассматриваем значения на зависающей круговой орбите. При условиях (11), (12) все уравнения системы (2) (или, что эквивалентно, системы (9)) при $s = 0$ сводятся к одному соотношению:

$$\dot u_0^4 = 0. \tag{13}$$

Дифференцируя по s интеграл уравнений (1) — (3) $g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = 1$ и используя соотношения (11) — (13), находим

$$\dot u_0^3 = 0. \tag{14}$$

Четыре уравнения системы (1) при условиях (11) — (14) дают следующие три алгебраических соотношения:

$$M\dot u_0^1 + 2M\Gamma^1_{\alpha\beta}u_0^\alpha u_0^\beta + AS_{20} - B\dot u_0^1 S_{20} - C\dot u_0^2 S_{20} = 0, \tag{15}$$

$$M\dot u_0^2 + 2M\Gamma^2_{\alpha\beta}u_0^\alpha u_0^\beta - AS_{10} + B\dot u_0^1 S_{10} + C\dot u_0^2 S_{10} = 0, \tag{16}$$

$$g_{11}\ddot u_0^1 S_{20} - g_{22}\ddot u_0^2 S_{10} = 0, \tag{17}$$

где

$$A = \frac{g_{33}}{u_0^4\sqrt{-g}}\left(u_0^4\ddot u_0^3 - u_0^3\ddot u_0^4\right);$$

$$B = -\frac{3}{2}\left(g_{33,1} - g_{33}g_{44}g_{44,1}\right)\frac{u_0^3}{\sqrt{-g}}, \quad C = -\frac{3}{2}g_{33,2}\frac{u_0^3}{\sqrt{-g}} \tag{18}$$

(напомним, что здесь подразумеваются значения $g_{\mu\nu}$ и символов Кристоффеля $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ на зависающей круговой орбите). Дифференцируя по s первые два уравнения системы (1), полагая затем $s = 0$ и комбинируя оба полученные соотношения, находим

$$\ddot u_0^1 S_{10} + \ddot u_0^2 S_{20} = 0. \tag{19}$$

Из (17), (19), учитывая (10) — (12), имеем

$$\ddot u_0^1 = 0, \quad \ddot u_0^2 = 0. \tag{20}$$

Учитывая (13), (14) и (20), замечаем, что неизвестными остаются $\dot u_0^1$, $\dot u_0^2$, $\ddot u_0^3$, $\ddot u_0^4$. Для их нахождения помимо двух уравнений (15), (16) получим еще два: первое получаем, дважды продифференцировав по s соотношение $g_{\mu\nu}u^{\mu}u^{\nu}=1$, второе — продифференцировав по s третье и четвертое уравнения системы (1) и комбинируя полученные выражения при $s=0$ так, чтобы исключить третьи производные от u^{μ}. Первое из этих уравнений имеет вид

$$2g_{11}(\dot{u}_0^1)^2+2g_{22}(\dot{u}_0^2)^2+2g_{33}u_0^3\ddot{u}_0^3+2g_{44}u_0^4\ddot{u}_0^4+$$
$$+(g_{33,1}\dot{u}_0^1+g_{33,2}\dot{u}_0^2)u_0^3u_0^3+g_{44,1}\dot{u}_0^1u_0^4u_0^4=0. \quad (21)$$

Второе уравнение в явном виде не выписываем ввиду его громоздкости. Анализируя это уравнение и уравнения (15), (16), (21) при условиях (11), (12) в результате громоздких выкладок убеждаемся, что перечисленные алгебраические уравнения имеют следующее единственное решение для величин $\dot{u}_0^1$, $\dot{u}_0^2$, $\ddot{u}_0^3$, $\ddot{u}_0^4$:

$$\dot{u}_0^1=-2\Gamma^1_{\alpha\beta}u_0^{\alpha}u_0^{\beta}=\frac{2}{r\alpha}\left(1-\frac{3m}{r}-\frac{m}{r}\alpha\right), \quad (22)$$

$$\dot{u}_0^2=-2\Gamma^2_{\alpha\beta}u_0^{\alpha}u_0^{\beta}=\frac{2}{r^2\alpha}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}, \quad (23)$$

$$\ddot{u}_0^3=-\frac{M^3r^3}{36S_{20}^3\sin^3\theta}\left[\left(1-\frac{3m}{r}-\frac{m}{r}\alpha\right)\sin^2\theta+\cos^2\theta\right], \quad (24)$$

$$\ddot{u}_0^4=-\frac{M^3r^3m}{36S_{20}^3}\frac{1-\frac{3m}{r}-\frac{m}{r}\alpha}{\left(1-\frac{2m}{r}\right)^{3/2}}(1+\alpha)^{1/2}. \quad (25)$$

Используя (14), (22), (23) для силы спин-орбитального взаимодействия в поле Шварцшильда, действующей на единицу массы вращающегося пробного тела при $s=0$, находим

$$F_c^i=\dot{u}_0^i+\Gamma^i_{\mu\nu}u_0^{\mu}u_0^{\nu}=-\Gamma^i_{\mu\nu}u_0^{\mu}u_0^{\nu}. \quad (26)$$

Для тела, движущегося по зависающей круговой орбите, имеем

$$F_{ck}^i=\Gamma^i_{\mu\nu}u_0^{\mu}u_0^{\nu} \quad (27)$$

(поскольку в этом случае $\dot{u}^{\mu}=0$). Сравнивая выражения (26), (27), заключаем, что сила спин-орбитального взаимодействия для движения, удовлетворяющего начальным условиям (11), отличается только знаком от значения этой силы на зависающих ультрарелятивистских круговых орбитах.

Возникает вопрос о том, насколько общим является рассмотренное выше свойство спин-орбитального взаимодействия в поле Шварцшильда, т. е. обобщается ли оно на произвольные орбиты (и на произвольные точки на орбите) пробного тела со спином. Если окажется, что для произвольных движений вращающегося пробного тела в поле Шварцшильда $F_c^i\to -F_c^i$ при $\frac{d\varphi}{ds}\to-\frac{d\varphi}{ds}$, то можно будет предположить, что спин-орбитальное взаимодействие в модельной задаче сферически симметричного коллапса не влияет на картину коллапса (поскольку в этом случае среднее значение спин-орбитальной силы было бы равным нулю).

1. *Пляцко Р. М.* Эффекты эйнштейновой теории тяготения, обусловленные колебаниями и спином пробного тела : Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Минск, 1979.— 16 с.
2. *Пляцко Р. М.* К влиянию спина пробного тела на его движение в гравитационном поле.— Весці АН БССР. Сер. фіз-мат., 1978, № 1, с. 47—50.
3. *Papapetrou A.* Spinning test-particles in general relativity.— Proc. Roy. Soc. A, 1951, **209**, p. 248—258.
4. *Wald R.* Gravitational spin interaction.— Phys. Rev. D, 1972, **6**, N 2, p. 406—413.

Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию 08.05.81