В результате применения последующих оценок [2, 3] с использованием первых пяти коэффициентов $B_{2i}$ ($i = 0, 1, 2, 3, 4$) для $p_{кр}$ получены уточненные оценки

$$109{,}689 < p_{кр} < 109{,}709. \qquad (21)$$

Рассматриваемая задача исследовалась рядом авторов [7, 9], которые получали значение $p_{кр}$ в пределах от 90 до 115. В частности, полученные методом характеристических рядов оценки [9] близки к оценкам (20). Уточненные оценки (21) согласуются с результатом В. И. Феодосьева, который получил $p_{кр} \approx 109{,}69$.

Применение выражений (3) позволяет строить характеристические ряды для задач рассмотренного вида и получать весьма точные значения критических нагрузок (при различных значениях других параметров).


1. *Балинский А. И., Зорий Л. М.* К исследованию зависимости низших частот деформируемых систем от параметров.— Физ.-хим. механика материалов, 1971, № 3, стр. 99—100.
2. *Зорій Л. М.* До теорії стійкості систем з розподіленими параметрами.— Доп. АН УРСР, 1968, № 11, с. 992—995.
3. *Зорій Л. М., Ісаєв Ю. І.* Двосторонні оцінки критичних параметрів пружних систем при флаттері.— Доп. АН УРСР, 1973, № 6, с. 529—531.
4. *Зорий Л. М.* К развитию аналитических методов исследования задач динамики упругих и гидроупругих систем.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1978, вып. 7, с. 16—20.
5. *Зорий Л. М.* Об одном фундаментальном свойстве функций влияния.— Докл. АН УССР. Сер. А., 1978, вып. 9, с. 805—808.
6. *Зорий Л. М.* О новом методе построения общих решений линейных дифференциальных уравнений.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1979, вып. 5, с. 351—355.
7. *Пановко Я. Г., Губанова И. И.* Устойчивость и колебания упругих систем.— М. : Наука, 1967.— 420 с.
8. *Попов Б. О., Монцібович Б. Р.* Розв'язування задач на машинах для інженерних розрахунків.— К. : Наук. думка, 1978.— 346 с.
9. *Таций Р. М.* Двусторонние оценки собственных значений в задачах о колебаниях и устойчивости упругих пластинок сложной формы : Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Львов, 1978.— 20 с.
10. *Тимошенко С. П.* Устойчивость стержней, пластин и оболочек.— М. : Наука, 1971.— 907 с.



Физико-механический институт АН УССР



Поступила в редколлегию 18.05.81



УДК 531.12



*Э. Н. Сокол*


## УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНОГО ДВИЖЕНИЯ ДВОЙНОГО ФИЗИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

При проектировании криволинейных элементов трубопроводных контейнерных трасс параметр переходной кривой рекомендуется выбирать таким, чтобы в круговой кривой, сопряженной с переходной, осуществить стационарное движение контейнера [3]. В связи с этим целесообразно поставить вопрос об устойчивости такого движения.

Движение контейнера в криволинейном участке трубопровода в некоторых случаях можно свести к движению системы двух тел (двойного физического маятника). При этом считаем, что точка $O$ подвеса системы перемещается по горизонтально расположенной кривой, на которой находятся центры поперечного сечения трубопровода, а относительное движение маятников происходит в плоскости его поперечного сечения (рис. 1, 2). Используя метод Рауса [1, 2], рассмотрим вопрос об устойчивости стационарного движения системы. Обозначим $m_1$, $m_2$, $C_1$, $C_2$, $v_1$, $v_2$ — соответственно массы, центры масс и скорости центров масс первого и второго маятников; $I_{\eta_1}$, $I_{\zeta_1}$, $I_{\xi_1}$, $I_{\eta_2}$, $I_{\zeta_2}$, $I_{\xi_2}$ — моменты инерции первого и второго маятников относительно соответствующих осей; $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\beta$ — обобщенные координаты; $T$, $\Pi$ — кинетическая и потенциальная энергия системы; $R$ — постоянный радиус кривизны линии, по которой движется точка подвеса маятников; $m = m_1 + m_2$; $r_1 = OC_1$; $r_2 = C_1C_2$; шарнир, связывающий маятники, находится в точке $C_1$. Запишем потенциальную и кинетическую энергии системы в виде

$$\Pi = mgr_1(1 - \cos\alpha_1) + m_2gr_2(1 - \cos\alpha_2), \tag{1}$$

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2}(R_1^2\dot\beta^2 + r_1^2\dot\alpha_1^2) + \frac{1}{2}(I_{\eta_1}\dot\beta^2\cos^2\alpha_1 + I_{\zeta_1}\dot\beta^2\sin^2\alpha_1 + I_{\xi_1}\dot\alpha_1^2) +$$
$$+ \frac{1}{2}m_2[R_2^2\dot\beta^2 + r_2^2\dot\alpha_2^2 + r_1^2\dot\alpha_1^2 + 2r_1r_2\dot\alpha_1\dot\alpha_2\cos(\alpha_2 - \alpha_1)] +$$
$$+ \frac{1}{2}(I_{\eta_2}\dot\beta^2\cos^2\alpha_2 + I_{\zeta_2}\dot\beta^2\sin^2\alpha_2 + I_{\xi_2}\dot\alpha_2^2),$$

или при условии, что $I_{\eta_1} = I_{\zeta_1}$, $I_{\eta_2} = I_{\zeta_2}$,

$$T = \frac{1}{2} \times (a_{11}\dot\beta^2 + a_{22}\dot\alpha_2^2 + a_{33}\dot\alpha_1^2) + r_1r_2\dot\alpha_1\dot\alpha_2 \times \cos(\alpha_2 - \alpha_1), \tag{2}$$

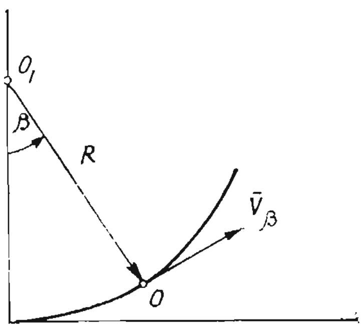

Рис. 1

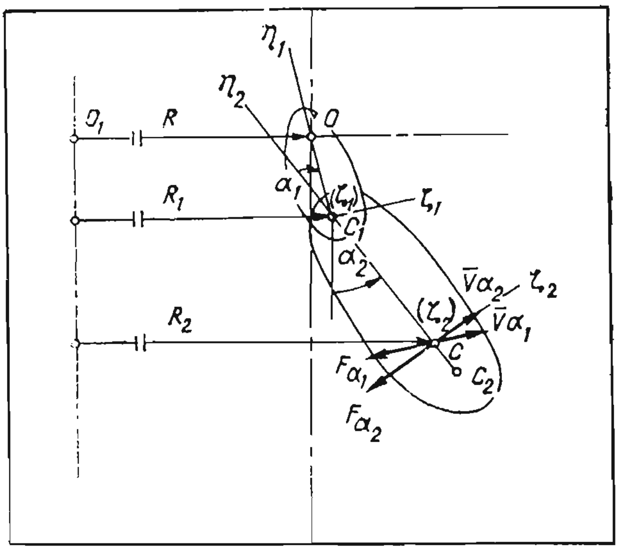

Рис. 2

где

$$a_{11} = m_1R_1^2 + m_2R_2^2 + I_{\eta_1} + I_{\eta_2}; \quad a_{22} = m_2r_2^2 + I_{\xi_2};$$
$$a_{33} = mr_1^2 + I_{\xi_1}; \quad R_1 = R + r_1\sin\alpha_1; \quad R_2 = R + r_1\sin\alpha_1 + r_2\sin\alpha_2.$$

Отметим, что координаты $\alpha_1$, $\alpha_2$ позиционные,а $\beta$ циклическая. Циклический интеграл

$$\frac{\partial T}{\partial\dot\beta} = a_{11}\dot\beta = h = \text{const}. \tag{3}$$

Отсюда найдем $\dot\beta$, подставим его в (2) и составим функцию Рауса

$$F = T^* - h\dot\beta, \tag{4}$$

где $T^*$ — значение $T$, в которое подставлено $\dot\beta$, найденное из формулы (3).

Анализируя равенство (4), устанавливаем, что система гироскопически не связана. Следовательно, потенциальная энергия $W$ приведенной системы может быть записана в виде

$$W = mgr_1(1 - \cos\alpha_1) + m_2gr_2(1 - \cos\alpha_2) + \frac{h^2}{2a_{11}}. \tag{5}$$

Положим

$$\alpha_1 = \gamma_1 + x_1, \quad \alpha_2 = \gamma_2 + x_2,$$

Здесь $\gamma_1$, $\gamma_2$ — значения $\alpha_1$ и $\alpha_2$ в стационарном движении, а $x_1$, $x_2$ — отклонения (вариации). Внесем эти выражения в потенциальную энергию приведенной системы. Получим

$$W = mgr_1[1-\cos(\gamma_1+x_1)] + m_2gr_2[1-\cos(\gamma_2+x_2)] + \frac{h^2}{2a_{11}}. \qquad (6)$$

Согласно теореме Рауса [1] стационарное движение устойчиво относительно позиционных координат $\alpha_1$, $\alpha_2$ и скоростей $\dot\alpha_1$, $\dot\alpha_2$, если в этом движении потенциальная энергия приведенной системы $W$ имеет минимум. Для этого достаточно, чтобы функция $W - W_0$ ($W_0$ — значение $W$ в стационарном движении) была определенно-положительной, т. е. чтобы определенно-положительной была ее квадратичная форма.

Разложим функцию $W - W_0$ в ряд Маклорена по степеням $x_1$ и $x_2$:

$$W - W_0 = \left(\frac{\partial W}{\partial x_1}\right)_0 x_1 + \left(\frac{\partial W}{\partial x_2}\right)_0 x_2 +$$
$$+ \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2}\right)_0 x_1^2 + 2\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_1 \partial x_2}\right)_0 x_1x_2 + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2}\right)_0 x_2^2\right] + \cdots \qquad (7)$$

Равенства

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x_1}\right)_0 = mgr_1\sin\gamma_1 - \frac{h^2}{2}\,\frac{\left(\frac{\partial a_{11}}{\partial x_1}\right)_0}{(a_{11}^2)_0} = 0, \qquad (8)$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x_2}\right)_0 = m_2gr_2\sin\gamma_2 - \frac{h^2}{2}\,\frac{\left(\frac{\partial a_{11}}{\partial x_2}\right)_0}{(a_{11}^2)_0} = 0, \qquad (9)$$

где

$$\left(\frac{\partial a_{11}}{\partial x_2}\right)_0 = 2m_2r_2\cos\gamma_2(R + r_1\sin\gamma_1 + r_2\sin\gamma_2),$$

$$\left(\frac{\partial a_{11}}{\partial x_1}\right)_0 = 2r_1\cos\gamma_1[m_1\overbrace{(R + r_1\sin\gamma_1)}^{R_1^*} + m_2\overbrace{(R + r_1\sin\gamma_1 + r_2\sin\gamma_2)}^{R_2^*}],$$

выражают условия осуществимости стационарного движения. Преобразуя равенства (8) и (9), получаем

$$\operatorname{tg}\gamma_1 = \frac{h^2(m_1R_1^* + m_2R_2^*)}{mga_{11}^2}, \quad \operatorname{tg}\gamma_2 = \frac{h^2R_2^*}{ga_{11}^2}, \qquad (10)$$

или

$$\frac{\operatorname{tg}\gamma_1}{\operatorname{tg}\gamma_2} = \frac{m_1R_1^* + m_2R_2^*}{mR_2^*}. \qquad (11)$$

Подставляя в выражение (7) равенства (8) и (9), получаем квадратичную форму функции $W - W_0$ в виде

$$W - W_0 = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2}\right)_0 x_1^2 + 2\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_1\partial x_2}\right)_0 x_1x_2 + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2}\right)_0 x_2^2\right] + \ldots, \qquad (12)$$

где

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2}\right)_0 = mgr_1\cos\gamma_1 - \frac{h^2}{2}\,\frac{(a_{11})_0\left(\frac{\partial^2 a_{11}}{\partial x_1^2}\right)_0 - 2\left(\frac{\partial a_{11}}{\partial x_1}\right)_0^2}{(a_{11}^3)_0}; \qquad (13)$$

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2}\right)_0 = m_2gr_2\cos\gamma_2 - \frac{h^2}{2}\,\frac{(a_{11})_0\left(\frac{\partial^2 a_{11}}{\partial x_1^2}\right)_0 - 2\left(\frac{\partial a_{11}}{\partial x_2}\right)_0^2}{(a_{11}^3)_0}; \qquad (14)$$

$$\left(\frac{\partial^2 a_{11}}{\partial x_1^2}\right)_0 = 2r_1\cos\gamma_1\,[mr_1\cos\gamma_1 - m\,(R + r_1\sin\gamma_1)\,\mathrm{tg}\,\gamma_1 - m_2r_2\sin\gamma_2\,\mathrm{tg}\,\gamma_1];$$

$$\left(\frac{\partial^2 a_{11}}{\partial x_2^2}\right)_0 = 2m_2r_2\cos\gamma_2\,[r_2\cos\gamma_2 - (R + r_1\sin\gamma_1 + r_2\sin\gamma_2)\,\mathrm{tg}\,\gamma_2]; \tag{15}$$

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_1\partial x_2}\right)_0 = 2m_2r_1r_2\cos\gamma_1\cos\gamma_2. \tag{16}$$

(17)

Критерий Сильвестра для этой квадратичной формы имеет вид

$$\Delta_1 = \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2}\right)_0 > 0, \tag{18}$$

$$\Delta_2 = \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2}\right)_0 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2}\right)_0 - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_1\partial x_2}\right)_0 > 0. \tag{19}$$

Подставляя сюда значения (13) — (17), можно установить условия, при которых движение системы будет устойчивым. Рассмотрим практически важный случай, когда

$$R \gg r_2 > r_1, \quad m_1 \ll m_2. \tag{20}$$

В этом случае систему можно рассматривать как одно тело, точка подвеса которого $C_1$ имеет эксцентриситет $r_1$ по отношению к центру поперечного сечения трубопровода $O$. Из равенства (10) получаем

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma = \mathrm{arctg}\,\frac{v_0^2}{Rg}\ . \tag{21}$$

Это значит, что в стационарном движении углы отклонения точек $C_1$ и $C_2$ от вертикали равны и не превышают $\frac{\pi}{2}$ при сколь угодно большой скорости $v_0$. Критерий Сильвестра с учетом равенств (20), (21) принимает вид

$$mg + \frac{h^2}{R^4}\,(R\,\mathrm{tg}\,\gamma + 3r_1\cos\gamma) > 0, \tag{22}$$

$$\left[mg + \frac{h^2}{mR^4}\,(R\,\mathrm{tg}\,\gamma + 3r_1\cos\gamma)\right]\left[mg + \frac{h^2}{mR^4}\,(R\,\mathrm{tg}\,\gamma + 3r_2\cos\gamma)\right] > $$
$$> 4m^2r_1r_2\cos^2\gamma, \tag{23}$$

где $h = mv_0R$.

Соотношение (22) при $\frac{\pi}{2} > \gamma > 0$ выполняется всегда. Проанализируем соотношение (23). Пусть при $R = \mathrm{const}$ $v \to 0$ (или при $v = \mathrm{const}$ $R \to 0$). Тогда значение $\gamma \to 0$, а неравенство (23) — к выражению

$$g^2 > 4r_1r_2. \tag{24}$$

Если при $R = \mathrm{const}$ $v_0 \to \infty$, то $\gamma \to \frac{\pi}{2}$, а выражение (23) стремится к соотношению

$$\infty > 4r_1r_2. \tag{25}$$

Из неравенств (24), (25) видно, что при $\frac{\pi}{2} > \gamma > 0$ соотношение (23) всегда выполняется, т. е. квадратичная форма функции $W - W_0$ является определенно-положительной. Следовательно, стационарное движение системы будет устойчивым. Отметим, что подбирая параметр переходной кривой по предложенному в работе [3] методу, в круговой кривой можно добиться стационарного движения системы. А это дает возможность избавиться от ненужных колебаний и дополнительных ускорений.

1. *Меркин Д. Р.* Введение в теорию устойчивости движения.— М. : Наука, 1971.— 312 с.
2. *Румянцев В. В.* Об устойчивости стационарных движений спутников.— Мат. методы в динамике косм. аппаратов, 1969, вып. 4, с. 53—58.
3. *Сокол Э. Н.* Расчет элементов контейнерных трубопроводных трасс.— Стр-во трубопроводов, 1979, № 7, с. 25—26.

Львовский политехнический институт

Поступила в редколлегию 08.06.81

УДК 539.3

*О. Л. Кордюк, А. В. Плеханов*

## КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ В ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЕ ПРИ КРУЧЕНИИ

Для решения задачи о кручении трехслойной пластины, ослабленной круговым отверстием, используются уравнения, полученные в работе [3]. Уравнения учитывают деформации поперечного сдвига и обжатия, порядок их не зависит от номера приближения и для любого напряженного состояния равен шести.

Рассмотрим трехслойную изотропную пластину симметричного строения постоянной толщины $H$, составленную из наружных слоев толщиной $t$ и заполнителя толщиной $2h$. Пластина ослаблена круговым отверстием радиуса $r_0$. Координатную ось $z$ цилиндрической системы координат $r\theta z$ направим вниз по геометрической оси отверстия, плоскость $r\theta$ совместим со срединной плоскостью пластины. Лицевые плоскости $z = \pm 0{,}5H$ и контур отверстия свободны от нагрузки, а на бесконечности пластина испытывает кручение моментами $M$.

Напряженное состояние в пластине с отверстием представим в виде суммы основного и возмущенного напряженных состояний. Для основного напряженного состояния

$$\begin{aligned} &\sigma_r^{0k} = S_0^k Mz \sin 2\theta, \quad \sigma_\theta^{0k} = -S_0^k Mz \sin 2\theta, \\ &\sigma_{r\theta}^{0k} = S_0^k Mz \cos 2\theta, \quad \sigma_{rz}^{0k} = \sigma_{\theta z}^{0k} = \sigma_z^{0k} = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где $S_0^k = E^k / D_1 (1 - \mu_k^2)$.

Остальные обозначения здесь и в дальнейшем соответствуют работе [3].

При определении возмущенного состояния воспользуемся уравнениями, полученными в соответствии с работой [3]: для первого приближения ($j = 1$)

$$\begin{aligned} &\nabla^4 w_1 = 0, \\ &\nabla^2 \psi_1 - 2L_{711} L_{1111} L_{1211}^{-1} \psi_1 = 0; \end{aligned} \tag{2}$$

для второго приближения ($j = 2$)

$$B_{31} \nabla^4 w_2 + B_{32} h^{-2} \nabla^2 w_2 + B_{33} h^{-4} w_2 = -B_{30} h^{-2} \nabla^2 w_1, \tag{3}$$

$$\nabla^2 \psi_2 - 2 (B_0 + B_{11}) (B_{16} h^2)^{-1} \psi_2 = 2B_{38} [B_2 (B_9 - B_{11}) h^2]^{-1} \psi_1. \tag{4}$$

Остальные функции для первого и второго приближений определяются через $w_1$, $w_2$, $\psi_1$, $\psi_2$ и здесь не приводятся.

Уравнения для второго и последующих приближений являются неоднородными. Для сведения их к однородным представим $w_j$ и $\psi_j$ ($j \geqslant 2$) в виде

$$\begin{aligned} &w_j = \sum_{m=1}^{j} (\alpha_{jm} w_m^* + \beta_{jm} \nabla^2 w_m^*), \\ &\psi_j = \sum_{m=1}^{j} \gamma_{jm} \psi_m^*, \end{aligned} \tag{5}$$

где при $j = 2$

$$\alpha_{22} = B_{31}^{-1}; \quad \beta_{22} = 0; \quad \gamma_{22} = 1.$$