В этих выражениях вместо $v(x, t)$ можно подставлять любое решение уравнения (3), определяемое функцией $u(x, t)$, так что полученные токи являются некоторыми функционалами, определяемыми решениями $u(x, t)$ уравнения (1). Ввиду бесконечности числа решений $v(x, t)$ уравнения (3) получили фактически бесконечное число законов сохранения для уравнения (1).

Дальнейшее исследование в указанном направлении может заключаться в поисках решений уравнения (11), зависящих от высших производных. Полученные результаты можно применить к исследованию краевых задач для уравнения (1).

1. *Колесников П. М.* О диффузии сильного магнитного поля в нелинейных средах. 1.— Журн. техн. физики, 1968, 38, № 12, с. 2014—2021.
2. *Нейман Л. Р.* Поверхностный эффект в ферромагнитных телах.— М. : Госэнергоиздат, 1949.— 190 с.
3. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений.— М. : Наука, 1978.— 399 с.
4. *Солодяк М. Т.* Температурные поля и напряжения в магнитомягком упругом полупространстве при установившемся периодическом во времени электромагнитном поле.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1980, вып. 12, с. 108—110.
5. *Хухунашвили З. В.* Симметрия дифференциальных уравнений теории поля.— Изв. вузов. Физика, 1971, № 3, с. 95—103.
6. *Aldersley S. J.* Higher Euler operators and some of their applications.— J. Math. Phys., 1979, 20, N 3, p. 522—531.
7. *Komkov V.* A dual form of Noether's theorem with applications.— J. Math. Anal. Appl., 1980, 75, N 1, p. 251—269.
8. *Santilli R. M.* Foundations of theoretical mechanics. I. The inverse problem in newtonian mechanics.— New York etc : Springer, 1978.— 266 p.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
08.05.81

УДК 517.9

Я. П. Антонюк, Л. М. Зорий, Б. А. Попов

К ИССЛЕДОВАНИЮ МЕТОДОМ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ РЯДОВ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСНОЙ ФОРМЫ УПРУГИХ СИСТЕМ

При изучении малых колебаний и устойчивости сложных упругих систем успешно используется метод характеристических рядов [4]. Исследование указанных задач зачастую сводится к обобщенным краевым задачам для линейных дифференциальных уравнений.

Пусть задано уравнение вида

$$L[y] \equiv y^{(n)}(x) + \sum_{i=1}^{n} p_i(x)\, y^{(n-i)}(x) = p(x), \tag{1}$$

где $p_i(x)$ — непрерывные и непрерывно дифференцируемые функции на интервале (a, b) до порядков $n - i$ включительно; $p(x)$ — непрерывная функция. Общее решение этого уравнения имеет вид [6]

$$y(x, \alpha) = \sum_{i=0}^{n-1} C_i K_x^{(i)}(x, \alpha) + \int_{\alpha}^{x} K(x, \alpha)\, p(\alpha)\, d\alpha. \tag{2}$$

Здесь $K(x, \alpha)$ — функция влияния соответствующего однородного уравнения.

При построении характеристических рядов используем формулу [5]

$$K_{\alpha^r}^{(r)}(x, \alpha) = \sum_{s=n-1}^{\infty} \frac{1}{(s-k)!}\, b_{s-r,r}^{(s)}(\alpha)\,(x-\alpha)^{s-r}, \tag{3}$$

где $K_{\alpha^r}^{(r)}(x, \alpha)$ — частные производные от функции $K(x, \alpha)$; $b_{s-r,r}^{(s)}$, $r = \overline{0, n-1}$ — функции, последовательно определяемые через $p_i(\alpha)$ и их производные.

В качестве примеров рассмотрим задачи об устойчивости плоской формы изгиба консольной двутавровой балки (задача С. П. Тимошенко) и об устойчивости упругого движущегося стержня при действии следящей силы.

ψ	—β	б₁	б₂
0	0,1	1971,32	1975,04
	0,5	446,957	448,014
	1	254,981	255,742
	2	156,818	157,482
	4	104,048	104,731
	8	72,4229	73,1430
	16	51,1362	51,8032
	32	36,8615	37,4160
	48	31,2721	31,7852
1	0,1	294,898	294,936
	0,5	85,6931	85,7158
	1	58,9689	58,9970
	2	44,7357	44,7794
	4	36,1574	36,2326
	8	29,8287	29,9470
	16	24,5864	24,7420
	32	20,6456	20,8312
	48	19,0780	19,2890
∞	0,1	29,9105	29,9104
	0,5	29,5562	29,5572
	1	29,1229	29,1266
	2	28,2973	28,3094
	4	26,8200	26,8532
	8	24,5113	24,5814
	16	21,6603	21,7726
	32	19,0985	19,2518
	48	18,0207	18,2050

Задача Тимошенко сводится к решению краевой задачи [10]

$$f^{(4)}(x) - \beta f^{(2)}(x) - k^2\beta(1-x)^2 f(x) = 0, \quad (4)$$

$$f(0) = 0, \quad f^{(1)}(0) - \psi f^{(2)}(0) = 0,$$
$$f^{(2)}(1) = 0, \quad \beta f^{(1)}(1) - f^{(3)}(1) = 0, \quad (5)$$

где $\beta = -\frac{2Cl^2}{Dh^2}$; $k^2 = \frac{BC}{pl^4}$; l, h — длина и высота балки соответственно; B — наименьшая жесткость изгиба; C — жесткость балки при кручении; D — жесткость полки в ее плоскости при изгибе; ψ — параметр жесткости защемления; p — параметр нагрузки.

С. П. Тимошенко отмечал, что при малых значениях параметра β применение энергетического метода потребовало бы весьма трудоемких вычислений [10].

Применяя к задаче (4) — (5) формулы (3), приходим к характеристическому уравнению

$$\Delta = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{C_r}{r!} - \beta\sum_{r=2}^{\infty}\frac{D_r}{r!} + \psi\left(\sum_{r=1}^{\infty}\frac{C_r}{(r-1)!} - \beta\sum_{r=2}^{\infty}\frac{D_r}{(r-1)!}\right) = 0, \quad (6)$$

где коэффициенты C_r и D_r определяются рекуррентными соотношениями

$$C_r = (-1)^r\sum_{i=1}^{r+1}(C_r^i - C_r^{i-1})\, b_{i,2} b_{r-i+1,3}, \qquad r = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots; \quad (7)$$

$$D_r = (-1)^r\sum_{i=1}^{r-1}(C_r^i - C_r^{i-1})\, b_{i,2} b_{r-i+1,1}, \qquad r = 2,\ 3,\ 4,\ \ldots; \quad (8)$$

$$b_{4+s,m} = C_s^2\cdot 2k^2\beta b_{s-2,m} + \beta b_{s+2,m}, \qquad s = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots; \quad m = 1,\ 2,\ 3.$$

Начальные значения для выражений (7) находятся из соответствующего определителя Вронского [6]

$$W(K)\big|_{\substack{\alpha=1\\ x=1}} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -\beta \\ 1 & 0 & \beta & 0 \end{vmatrix}. \quad (9)$$

Перепишем левую часть равенства (6) в виде ряда по степеням k^2:

$$\Delta = B_0 - k^2B_2 + k^4B_4 - k^6B_6 + \cdots, \quad (10)$$

где B_{2i} — целые функции параметров β и ψ, определяемые формулами

$$B_{2i} = b_{2i}(1, \beta) + \psi b_{2i}^{(1)}(1, \beta),$$

$$b_0(x, \beta) = \frac{1}{0!} + \frac{1}{2!}\beta x^2 + \frac{1}{4!}\beta^2 x^4 + \cdots,$$

$$b_2(x,\ \beta) = \frac{4}{6!}\beta x^6 + \frac{36}{8!}\beta^2 x^8 + \frac{184}{10!}\beta^3 x^{10} + \cdots, \tag{11}$$

$$b_4(x,\ \beta) = \frac{784}{12!}\beta^2 x^{12} + \frac{15\,824}{14!}\beta^3 x^{14} + \frac{119\,920}{16!}\beta^4 x^{16} + \cdots$$

Двухсторонние оценки δ_1 и δ_2 для k_0^2 имеют вид [1]

$$\frac{B_0}{\sqrt{B_2^2 - 2B_0B_4}} < k_0^2 < \frac{2B_0}{B_2 + \sqrt{B_2^2 - 4B_0B_4}}. \tag{12}$$

Алгоритм решения задачи, представленный формулами (4) — (12), реализован на алгоритмическом языке АНАЛИТИК [8] для ЭВМ «МИР-2». Аналитические выражения (11) для коэффициентов B_{2i} ($i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$) получены на ЭВМ. В таблице представлены численные значения двухсторонних оценок для k_0^2 в зависимости от различных значений параметров ψ и β. Применение простейших оценок (12) приводит к достаточно точным результатам (независимо от величины параметров β и ψ).

Задача об устойчивости упругого движущегося стержня при действии следящей силы сводится к решению краевой задачи

$$y^{(4)} + pxy^{(2)} + py^{(1)} - \Omega^2 y = 0, \tag{13}$$

$$y^{(2)}(0) = y^{(3)}(0) = y^{(2)}(1) = y^{(3)}(1) = 0, \tag{14}$$

где $p = \frac{Pl^2}{EI}$; $\Omega^2 = \frac{ml^4}{EI}$. Здесь P — следящая сила; l — длина стержня; EI — его изгибная жесткость; m — удельная масса стержня; x — безразмерная осевая координата.

Поступая, как выше, приходим к характеристическому уравнению задачи (13), (14):

$$\sum_{r=4}^{\infty} \frac{1}{r!} C_r(p,\ \Omega^2) = 0, \tag{15}$$

где $C_r = \sum_{k=2}^{r-1} (C_r^k - C_r^{k-1})\, b_{k+2,2} b_{r-k+3,3}$;

$$b_{s+i,i} = -spb_{s,i} + \Omega^2 b_{s-1,i} \qquad (i = 2,\ 3;\ s = 1,\ 2,\ \ldots);$$

$$b_{0,2} = b_{1,2} = b_{2,2} = b_{3,2} = 0; \tag{16}$$

$$b_{0,3} = -1; \quad b_{1,3} = b_{2,3} = b_{3,3} = 0. \tag{17}$$

Из уравнения (15) находим коэффициенты соответствующего характеристического ряда

$$\begin{aligned} B_0 &= \frac{2}{4!} - \frac{14}{7!}p + \frac{140}{10!}p^2 - \frac{1820}{13!}p^3 + \cdots, \\ B_2 &= \frac{8}{8!} - \frac{176}{11!}p + \frac{3640}{14!}p^2 - \frac{80\,920}{17!}p^3 + \cdots, \\ B_4 &= \frac{32}{12!} - \frac{1140}{15!}p + \frac{51\,040}{18!}p^2 - \frac{1\,747\,200}{21!}p^3 + \cdots, \\ B_6 &= \frac{128}{16!} - \frac{9728}{19!}p + \frac{527\,816}{22!}p^2 - \frac{2\,582\,400}{25!}p^3 + \cdots \end{aligned} \tag{18}$$

Для определения критического значения $p_{кр}$ применялись простейшие двухсторонние оценки [2] $p_н < p_{кр} < p_в$, причем значение $p_{кр}$ с недостатком и с избытком соответственно — наименьшие корни уравнений

$$\begin{vmatrix} B_2 & 2B_4 & 0 \\ B_0 & B_2 & B_4 \\ 0 & B_2 & 2B_4 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} B_2 & 2B_4 & 3B_6 \\ B_0 & B_2 & B_4 \\ 0 & B_2 & 2B_4 \end{vmatrix} = 0. \tag{19}$$

При этом получены значения

$$p_н = 108{,}613, \quad p_в = 110{,}111. \tag{20}$$

В результате применения последующих оценок [2, 3] с использованием первых пяти коэффициентов B_{2i} ($i = 0, 1, 2, 3, 4$) для $p_{кр}$ получены уточненные оценки

$$109{,}689 < p_{кр} < 109{,}709. \qquad (21)$$

Рассматриваемая задача исследовалась рядом авторов [7, 9], которые получали значение $p_{кр}$ в пределах от 90 до 115. В частности, полученные методом характеристических рядов оценки [9] близки к оценкам (20). Уточненные оценки (21) согласуются с результатом В. И. Феодосьева, который получил $p_{кр} \approx 109{,}69$.

Применение выражений (3) позволяет строить характеристические ряды для задач рассмотренного вида и получать весьма точные значения критических нагрузок (при различных значениях других параметров).

1. *Балинский А. И., Зорий Л. М.* К исследованию зависимости низших частот деформируемых систем от параметров.— Физ.-хим. механика материалов, 1971, № 3, стр. 99—100.
2. *Зорій Л. М.* До теорії стійкості систем з розподіленими параметрами.— Доп. АН УРСР, 1968, № 11, с. 992—995.
3. *Зорій Л. М., Ісаєв Ю. І.* Двосторонні оцінки критичних параметрів пружних систем при флаттері.— Доп. АН УРСР, 1973, № 6, с. 529—531.
4. *Зорий Л. М.* К развитию аналитических методов исследования задач динамики упругих и гидроупругих систем.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1978, вып. 7, с. 16—20.
5. *Зорий Л. М.* Об одном фундаментальном свойстве функций влияния.— Докл. АН УССР. Сер. А., 1978, вып. 9, с. 805—808.
6. *Зорий Л. М.* О новом методе построения общих решений линейных дифференциальных уравнений.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1979, вып. 5, с. 351—355.
7. *Пановко Я. Г., Губанова И. И.* Устойчивость и колебания упругих систем.— М. : Наука, 1967.— 420 с.
8. *Попов Б. О., Монцібович Б. Р.* Розв'язування задач на машинах для інженерних розрахунків.— К. : Наук. думка, 1978.— 346 с.
9. *Тацнй Р. М.* Двусторонние оценки собственных значений в задачах о колебаниях и устойчивости упругих пластинок сложной формы : Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Львов, 1978.— 20 с.
10. *Тимошенко С. П.* Устойчивость стержней, пластин и оболочек.— М. : Наука, 1971.— 907 с.

Физико-механический институт
АН УССР

Поступила в редколлегию
18.05.81

УДК 531.12

Э. Н. Сокол

УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНОГО ДВИЖЕНИЯ ДВОЙНОГО ФИЗИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

При проектировании криволинейных элементов трубопроводных контейнерных трасс параметр переходной кривой рекомендуется выбирать таким, чтобы в круговой кривой, сопряженной с переходной, осуществить стационарное движение контейнера [3]. В связи с этим целесообразно поставить вопрос об устойчивости такого движения.

Движение контейнера в криволинейном участке трубопровода в некоторых случаях можно свести к движению системы двух тел (двойного физического маятника). При этом считаем, что точка O подвеса системы перемещается по горизонтально расположенной кривой, на которой находятся центры поперечного сечения трубопровода, а относительное движение маятников происходит в плоскости его поперечного сечения (рис. 1, 2). Используя метод Рауса [1, 2], рассмотрим вопрос об устойчивости стационарного движения системы. Обозначим m_1, m_2, C_1, C_2, v_1, v_2 — соответственно массы, центры масс и скорости центров масс первого и второго маятников; I_{η_1}, I_{ζ_1}, I_{ξ_1}, I_{η_2}, I_{ζ_2}, I_{ξ_2} — моменты инерции первого и второго маятников относительно соответствующих осей; α_1, α_2, β — обобщенные координаты; T, Π — кинетическая и потенциальная энергия системы; R — постоянный ра-