с ядром

$$K(u, w) = (1 + G_0(u, 0)) \frac{\sin(u - w)}{u - w}.$$

Решив систему интегральных уравнений (26), по формуле (23) определим температурное поле в полупространстве. Последовательности уравнений (15), (27) можно решить соответетствующими числовыми методами.


1. *Галазюк В. А.* Метод поліномів Чебишева — Лагера в змішаній задачі для нелінійного диференціального рівняння 2-го роду з постійними коефіцієнтами.— Доп. АН УРСР. Сер. А, 1981, № 1, с. 3—6.
2. *Лебедев Н. Н.* Специальные функции и их приложение.— М. ; Л. : Физматгиз, 1963.— 358 с.
3. *Уфлянд Я. С.* Метод парных интегральных уравнений в задачах математической физики.— Л. : Наука, 1977.— 220 с.
4. *Трантер К. Дж.* Интегральные преобразования в матфизике.— М. : Гостехиздат, 1956.— 204 с.
5. *Трикоми Ф.* Интегральные уравнения.— М. : Изд-во иностр. лит., 1960.— 296 с.



Львовский университет

Поступила в редколлегию 03.06.81



УДК 536.12—539.376



*Е. Г. Грицько, Р. В. Гудзь*


## ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОГО ЦИЛИНДРА ПРИ ЗАВИСЯЩЕМ ОТ РАДИАЛЬНОЙ КООРДИНАТЫ КОЭФФИЦИЕНТЕ ТЕПЛООТДАЧИ

Рассмотрим ортотропный цилиндр $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant z < \infty$, $0 \leqslant \varphi < \pi$ боковая поверхность которого $r = R$ поддерживается при температуре $t_b$. Через его основание $z = 0$ осуществляется конвективный теплообмен с неоднородной средой: коэффициент теплоотдачи $\alpha_1$ с кольцевой области

$$\Gamma = \{(r, \varphi, z) : r_0 \leqslant r \leqslant r_1, \ 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \ z = 0\}$$

отличается от коэффициента теплоотдачи $\alpha$ с остальной части поверхности $z = 0$. Температура $t_1(r)$ внешней среды, омывающей область $\Gamma$, и температура $t_c(r)$ внешней среды, омывающей остальную часть поверхности $z = 0$, суть функции радиальной координаты.

Доопределив функцию $t_c(r)$ на области $\Gamma$ следующим образом: $t_c(r)|_{r \in \Gamma} \equiv t_c(r_0)$ и перейдя к безразмерным величинам, краевую задачу для определения нестационарного температурного поля запишем в виде [1]

$$\frac{k^2}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial \theta}{\partial \rho}\right) + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Z^2} = \frac{\partial \theta}{\partial \mathrm{Fo}}, \tag{1}$$

$$\vartheta|_{\rho=1} = 0, \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial Z} &= \mathrm{Bi}\,\theta + (\mathrm{Bi}_1 - \mathrm{Bi})\,\theta\chi(\rho) - \mathrm{Bi}\,[\theta_c(\rho) - \theta_c(\rho_0)\,\chi(\rho)] - \\ &\quad - \mathrm{Bi}_1\,\theta_1(\rho)\,\chi(\rho) \ \text{при} \ Z = 0, \\ &\theta|_{Z\to\infty} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$\theta|_{\mathrm{Fo}=0} = 0. \tag{4}$$

Здесь

$$\theta = \frac{t - t_b}{t_1(\rho_3 R) - t_b}; \quad \theta_c(\rho) = \frac{t_c(\rho R) - t_b}{t_1(\rho_3 R) - t_b};$$

$$\theta_1(\rho) = \frac{t_1(\rho R) - t_b}{t_1(\rho_3 R) - t_b}; \quad k = \sqrt{\frac{\lambda_\rho}{\lambda_Z}}; \quad \rho = \frac{r}{R}; \quad Z = \frac{z}{R};$$

$$\rho_0 = \frac{r_0}{R}; \quad \rho_1 = \frac{r_1}{R};$$

$$\mathrm{Fo} = \lambda_Z \tau (c \rho_m R^2)^{-1}; \quad \mathrm{Bi} = \alpha R \lambda_z^{-1}; \quad \mathrm{Bi}_1 = \alpha_1 R \lambda_z^{-1};$$
$$\chi(\rho)|_{\rho \in \Gamma} = 1; \quad \chi(\rho)|_{\rho \bar{\in} \Gamma} = 0,$$

где $\theta$ — температурное поле в полубесконечном цилиндре; $\lambda_\rho$, $\lambda_z$ — коэффициенты теплопроводности в соответствующих направлениях; $\tau$ — время; $c$ — удельная теплоемкость; $\rho_m$ — плотность; $\rho_3$ — радиус окружности максимального значения функции $\theta_1(\rho)$.

Применив к выражениям (1), (3) интегральное преобразование Лапласа по Fo и конечное преобразование Ханкеля по $\rho$ [2], с учетом условий (2), (4) получим

$$d^2\hat{\theta}/dZ^2 - \gamma^2\hat{\theta} = 0, \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned} d\hat{\theta}/dZ - \mathrm{Bi}\,\hat{\theta} &= B\int_{\rho_0}^{\rho_1} \tilde{\theta}\rho J_0(\lambda_k\rho)\,d\rho - s^{-1}f_0(\lambda_k) \quad \text{при} \quad Z = 0, \\ \hat{\theta}|_{Z\to\infty} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Здесь

$$\tilde{\theta} = \int_0^\infty \theta e^{-s\mathrm{Fo}} d\,\mathrm{Fo}; \quad \hat{\theta} = \int_0^1 \hat{\theta}\rho J_0(\lambda_k\rho)\,d\rho; \quad \gamma = \sqrt{k^2\lambda_k^2 + s}; \quad B = \mathrm{Bi}_1 - \mathrm{Bi};$$

$$f_0(\lambda_k) = \mathrm{Bi}\,[\bar{\theta}_c - \theta_c(\rho_0)\bar{\chi}] + \mathrm{Bi}_1 \int_{\rho_0}^{\rho_1} \theta_1(\rho)\,\rho J_0(\lambda_k\rho)\,d\rho,$$

где $J_n(\xi)$ — функция Бесселя первого рода порядка $n$; $\lambda_k$ — корни уравнения $J_0(\lambda_k) = 0$; $\bar{f} = \int_0^1 f(\rho)\,\rho\, J_0(\lambda_k\rho)\,d\rho$.

Из соотношений (5), (6) видно, что решение задачи (1) — (4) зависит от неизвестной трансформанты Лапласа температурного поля в области $\Gamma$. Поэтому представим $\tilde{\theta}$ в этой области аналогично работам [3, 4] в виде

$$\tilde{\theta}|_{\rho\in\Gamma} \approx \tilde{\theta}^0 = \sum_{n=0}^{N} d_n H_n(\rho). \tag{7}$$

Здесь $\{H_n(\rho)\}$ $(n = 0, 1, \ldots, N)$ — ортонормированная система функций с весом $g(\rho)$ на области $\Gamma$.

Заменим $\tilde{\theta}$ под знаком интеграла (6) выражением (7). Затем решим краевую задачу (5), (6). Применяя к полученному решению обратное преобразование Ханкеля, находим

$$\tilde{\theta}^* = 2\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k J_0(\lambda_k\rho)\left[s^{-1}f_0(\lambda_k) - B\sum_{n=1}^{N} d_n H_n^*\right]\varphi(Z), \tag{8}$$

где $\theta^*$ — температурное поле полубесконечного цилиндра, полученное вследствие замены (7);

$$\mu_k = [J_1(\lambda_k)]^{-2}; \quad H_n^* = \int_{\rho_0}^{\rho_1} H_n(\rho)\,\rho J_0(\lambda_k\rho)\,d\rho; \quad \varphi(Z) = e^{-\gamma Z}(\gamma + \mathrm{Bi})^{-1}.$$

Для определения неизвестных $d_n$ воспользуемся условием ортогональности $H_n(\rho)$ на области $\Gamma$, потребовав, чтобы выполнялось соотношение

$$d_n = c^{-1}\int_{\rho_0}^{\rho_1} \tilde{\theta}^* H_n(\rho)\,g(\rho)\,d\rho. \tag{9}$$

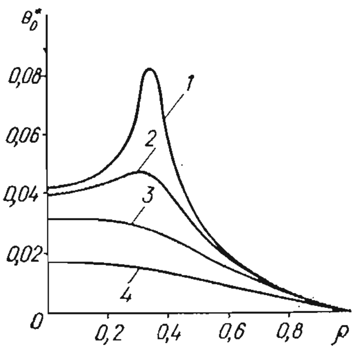
Здесь

$$c = \int_{\rho_0}^{\rho_1} H_n^2(\rho)\,g(\rho)\,d\rho.$$

Определив $d_n$, подставив его значение в выражение (8) и применив обратное преобразование Лапласа, температурное поле в полубесконечном цилиндре получим в виде

$$\theta^* = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \exp(s\,\mathrm{Fo})\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k J_0(\lambda_k\rho)\left[s^{-1}f_0(\lambda_k) - B\sum_{n=0}^{N} d_n H_n^*\right]\varphi(Z)\,ds. \qquad (10)$$

Поскольку $\theta$, $\theta^*$ являются решениями задачи (1), следовательно, $\delta\theta = \theta - \theta^*$ — также решение этого уравнения, то, применив принцип максимума [5], оценку точности полученного температурного поля можно осуществить способом, предложенным в работе [4].




Ограничиваясь случаем $g(\rho) = \rho$, $H_0(\rho) = 1$, $H_m(\rho) = 0$ при $m = 1, 2, \ldots, N$, получаем

$$\theta_0^* = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \exp(s\,\mathrm{Fo})\,F(s)\,ds, \qquad (11)$$

где

$$F(s) = \sum_{k=1}^{\infty}\mu_k J_0(\lambda_k\rho)\left[s^{-1}f_0(\lambda_k) - Bd_0\overline{\chi}\right]\varphi(Z).$$

Чтобы перейти от контурного интеграла в формуле (11) к римановому, воспользуемся следующим утверждением.

**Утверждение.** Если комплексные числа $v_n$ для всех $n = 1, 2, 3, \ldots$ удовлетворяют условию $|\arg v_n| < \frac{\pi}{2}$, то справедливо неравенство

$$\left|\arg\left(\sum_{n=1}^{\infty} v_n\right)\right| < \frac{\pi}{2}.$$

Рассматривая выражение (11) для $s$ из области $|\arg s| < \pi$ и учитывая утверждение, заключаем, что в этой области $F(s)$ имеет единственный полюс в точке $s = 0$. Отсюда ясно, что контурный интеграл (11), взятый вдоль прямой $\mathrm{Re}(s) = \sigma$, равен интегралу от этой подынтегральной функции, взятой по двум берегам разреза действительной отрицательной полуоси с обходом точки $s = 0$.

На рисунке приведена зависимость температурного поля $\theta_0^*$ от радиальной координаты для значений $z = 0$; 0,1; 0,25; 0,5 (кривые *1—4*) при $\mathrm{Fo} = \infty$, $\mathrm{Bi}_1 = 0{,}7$, $\mathrm{Bi} = 0{,}1$, $\rho_0 = 0{,}3$, $\rho_1 = 0{,}4$, $\theta_1(\rho) = \cos(\rho - 0{,}35)$, $\theta_c(\rho) = \exp[50(\rho - \rho_0)]$ для $0 \leqslant \rho \leqslant \rho_0$ и $\theta_c(\rho) = \exp[50(\rho_1 - \rho)]$ для $\rho_1 \leqslant \rho \leqslant 1$. Из рисунка видно, что влияние геометрии области теплового воздействия проявляется только в приповерхностных шарах до глубины $Z \approx 0{,}1$. Расчеты показали, что радиус окружности, на которой температурное поле в сечении $Z = Z_0 = \mathrm{const}$ максимально, уменьшается при увеличении $Z_0$.

Исследование нестационарного температурного поля в полубесконечном цилиндре при описанных условиях теплообмена ($\mathrm{Bi}_1 = 0{,}7$, $\mathrm{Bi} = 0{,}1$, $\theta/_{\rho=1} = 0$) показало, что отношение значений нестационарного и стационарного температурных полей, взятых в одних и тех же точках, составляет более 0,92 при $\mathrm{Fo} \geqslant 0{,}2$ и более 0,99 при $\mathrm{Fo} \geqslant 0{,}3$, т. е. можно считать, что при $\mathrm{Fo} > 0{,}3$ наступает установившийся процесс обмена теплом между внешней средой и полубесконечным цилиндром.


1. *Карслоу Г., Егер Д.* Теплопроводность твердых тел.— М. : Наука, 1964.— 487 с.
2. *Галицин А. С., Жуковский А. М.* Интегральные преобразования и специальные функции в задачах теплопроводности.— К. : Наук. думка, 1976.— 283 с.
3. *Коляно Ю. М., Грицько Е. Г.* Определение нестационарных температурных полей и напряжений в ортотропных телах при локальном изменении коэффициента теплоотдачи с их поверхности.— В кн.: Нелинейная теория оболочек и пластин : Тез. докл. симпоз.

по нелинейной теории оболочек. Казань 8—10 сентября 1980 г. Казань. 1980, с. 113. (Препринт; № 09031).
4. *Коляно Ю. М., Грицько Е. Г.* О применении ортогональных систем функций при расчете температурных полей локально нагреваемых по торцам пластинок.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1980, вып. 11, с. 100—103.
5. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики.— М. : Наука, 1966.— 724 с.

Институт прикладных проблем
механики и математики
АН УССР

Поступила в редколлегию
17.12.80

УДК 517.95

*М. Т. Солодяк, В. И. Третяк*

## ВАРИАЦИОННАЯ ФОРМУЛИРОВКА И ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ДЛЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Нелинейное уравнение параболического типа

$$u_{xx} - a(u)\,u_t = 0, \tag{1}$$

где $a(u)$ — заданная функция переменной $u(x, t)$, встречается в ряде задач электродинамики сплошных сред и термоупругости [1, 2, 4]. Здесь решается проблема сопоставления уравнению (1) вариационного принципа с интегралом действия

$$S = \int dxdtL \tag{2}$$

и изучаются его свойства симметрии. Совместное решение этих двух задач позволяет найти по теореме Нетер [3, 5] законы сохранения для уравнения (1).

Проблема нахождения вариационного принципа для заданных уравнений составляет содержание обратной задачи вариационного исчисления [6, 8] и имеет хорошо определенное решение лишь для самосопряженных уравнений или систем. Для уравнений, заданных в несамосопряженном виде, к которым относится (1), задача значительно усложняется. Один из способов ее решения, рассматриваемый в настоящей работе, заключается в погружении уравнения (1) в некоторую самосопряженную систему [7]. С этой целью введем вспомогательное поле $v(x, t)$, удовлетворяющее уравнению

$$v_{xx} + a(u)\,v_t = 0. \tag{3}$$

Система уравнений (1), (3) является самосопряженной при любых функциях $a(u)$. Функция Лагранжа $L$, определяющая действие (2), находится по правилу [6] и после некоторых преобразований приобретает вид

$$L = u_x v_x + (vu_t - uv_t)\,b(u), \tag{4}$$

где

$$b(u) \equiv \int_0^1 d\tau\tau a(\tau u). \tag{5}$$

Легко убедиться, что уравнения Эйлера, соответствующие функции Лагранжа (4), дают систему уравнений (1), (3). При этом используется тождество

$$2b(u) + ub'(u) = a(u), \tag{6}$$

являющееся следствием (5). Штрих у функции обозначает производную по ее аргументу.

Получили вариационную формулировку уравнения (1) за счет введения добавочного поля $v(x, t)$, определением которого следует считать уравнение (3). Если в последнем $u$ — заданное решение (1), то (3) — линейное уравнение с переменным коэффициентом. Ввиду нефизичности поля $v(x, t)$