Решение задачи (5), (6) эквивалентно решению системы нелинейных алгебраических уравнений

$$\begin{gathered} z_1(z_1^0, z_2^0, z_3^0, z_4^0, z_5^0, 1) = 0, \\ z_3(z_1^0, z_2^0, z_3^0, z_4^0, z_5^0, 1) = 0, \\ z_5(z_1^0, z_2^0, z_3^0, z_4^0, z_5^0, 1) + (\nu - 1) z_4(z_1^0, z_2^0, z_3^0, z_4^0, z_5^0, 1) + (1 - \nu) q_{T_2} = 0 \end{gathered} \tag{8}$$

относительно неизвестных z_2^0, z_3^0, z_5^0 и решению задачи Коши

$$\frac{d\vec{z}}{d\rho} = \vec{f}(\vec{z}, \rho), \tag{9}$$

$$\vec{z}(0) = \vec{z}_0, \tag{10}$$

где $\vec{z}_0 = (z_1^0, z_2^0, z_3^0, z_4^0, z_5^0)$.

Для решения системы (8) можно использовать разностный аналог одного из методов типа Ньютона — Канторовича. Учитывая, что при этом для решения краевых задач необходимо большое количество вычислений, чтобы получить значения функций z_1, z_3, z_5 системы (8) и матрицы Якоби с разностного аналога, эффективнее использовать рекурсивные итерационные методы [1] с оптимальным выбором параметра рекурсии. Они удобны для вычислений на ЭВМ и дают возможность так подобрать параметр рекурсии, чтобы метод был наиболее эффективным в смысле количества операций. Для решения системы нами использована вычислительная схема [1] с оптимальным параметром рекурсии $l = 3$. Алгоритм решения задачи реализуется на ЭВМ «М-222». Программа может быть использована для произвольных значений параметров γ, α, q_{T_1}, q_T, и при других условиях закрепления оболочки.

В качестве примера рассмотрена пологая сферическая стальная (марки 1Х18Н9Т) (см. [3]) оболочка при различных параметрах подъема $\gamma = 1$, 2, 3, 4. На рисунке приведена зависимость максимального прогиба W^* в центре от температурной нагрузки q_T, при указанных γ.

Данные результаты исследований согласуются с полученными другим методом [5].

1. *Бартиш М. Я., Щербина Ю. Н.* Итерационные формулы, получаемые с помощью рекурсии.— В кн.: Математический сборник. Киев : Наук. думка, 1976, с. 50—53.
2. *Бартіш М. Я., Ярема Л. Л.* Про застосування одного класу методів типу Ньютона — Канторовича до розв'язування нелінійних крайових задач.— В кн.: Питання якісної теорії диференціальних рівнянь та їх застосування. К. : Ін-т математики АН УРСР, 1978, с. 3—4.
3. *Безухов Н. И., Бажанов В. Л., Гольденблат И. И. и др.* Расчеты на прочность, устойчивость и колебания в условиях высоких температур.— М. : Машиностроение, 1965.— 567 с.
4. *Шаманский В. Е.* Методы численного решения кревых задач на ЭЦВМ.— Киев : Наук. думка, 1966.— Ч. 2, с. 8—11.
5. *Ярема С. Я., Желевняк Т. В.* Осесимметричная температурная задача гибких пластин и пологих оболочек.— Тепловые напряжения в элементах конструкций, 1965, вып. 5, с. 287—296.

Львовский университет

Поступила в редколлегию 29.12.80

УДК 517.949.8+536.12

Л. Е. Губаль, Н. И. Иванчов, М. Д. Коркуна

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ДВИЖУЩИМСЯ ИСТОЧНИКОМ ТЕПЛА

Рассмотрим применение метода малого параметра и метода сеток к решению задачи об определении температурного поля в бесконечной плите при интенсивном поверхностном нагреве источником тепла постоянной мощности, который движется с постоянной скоростью по одной из поверхностей плиты. На другой поверхности плиты поддерживается постоянная температура. При решении задачи учтена нелинейная зависимость теплофизических характеристик материала от температуры. В подвижной системе координат эта задача сводится к решению уравнения

$$c(T)\frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(\lambda(T)\operatorname{grad}T) + c(T)\,b\,\frac{\partial T}{\partial x}, \quad 0 < z < H, \quad t > 0 \qquad (1)$$

с начальными и краевыми условиями

$$T|_{t=0} = T_0, \qquad (2)$$

$$-\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial z}\Big|_{z=0} = \tilde{q}, \quad T|_{z=H} = T_0, \qquad (3)$$

где $c(T)$ — коэффициент объемной теплоемкости; $\lambda(T)$ — коэффициент теплопроводности; $b = \mathrm{const}$ — скорость движения источника тепла;

$$T_0 = \mathrm{const}; \quad \tilde{q} = \begin{cases} q = \mathrm{const} & \text{при } x^2 + y^2 \leqslant R^2, \\ 0, & \text{при } x^2 + y^2 > R^2. \end{cases}$$

С помощью подстановки Кирхгофа

$$u(x, y, z, t) = \int\limits_{T_0}^{T(x,y,z,t)} \lambda(\tau)\,d\tau$$

задача (1) — (3) сводится к виду

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a(u)\Delta u + b\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad (4)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=0} = -\tilde{q}, \quad u|_{z=H} = 0. \qquad (5)$$

Здесь

$$a(u) = \frac{\lambda(T)}{c(T)}.$$

Предположим, что

$$a(u) = a_0^{(j)} + \varepsilon a_1^{(j)}u + \varepsilon^2 a_2^{(j)}u^2 + \cdots, \quad \theta_{j-1} \leqslant u < \theta_j, \quad j = \overline{1, k}. \qquad (6)$$

В соответствии с данным представлением $a(u)$ разбиваем процесс нахождения температуры тела на k этапов, на каждом из которых решение задачи (4), (5) отыскиваем методом малого параметра в виде

$$u^{(j)} = u_0^{(j)} + \varepsilon u_1^{(j)} + \varepsilon^2 u_2^{(j)} + \cdots \qquad (7)$$

Для функций $u_i^{(j)}$ ($i = 0, 1, 2, \ldots; j = \overline{1, k}$) получаем задачи

$$\frac{\partial u_0^{(j)}}{\partial t} = a_0^{(j)}\Delta u_0^{(j)} + b\frac{\partial u_0^{(j)}}{\partial x}, \quad u_0^{(j)}|_{t=t_{j-1}} = u_0^{(j-1)}|_{t=t_{j-1}}$$

$$\frac{\partial u_0^{(j)}}{\partial z}\Big|_{z=0} = -\tilde{q}, \quad u_0^{(j)}|_{z=H} = 0, \qquad (8)$$

$$\frac{\partial u_1^{(j)}}{\partial t} = a_0^{(j)}\Delta u_1^{(j)} + b\frac{\partial u_1^{(j)}}{\partial x} + a_1^{(j)}u_0^{(j)}\Delta u_0^{(j)},$$

$$u_1^{(j)}|_{t=t_{j-1}} = u_1^{(j-1)}|_{t=t_{j-1}}, \quad \frac{\partial u_1^{(j)}}{\partial z}\Big|_{z=0} = 0, \quad u_1^{(j)}|_{z=H} = 0, \qquad (9)$$

где $t_0 = 0$; $u_i^{(0)}|_{t=0} = 0$; t_j — момент времени, когда происходит переход от j-го этапа к $j + 1$-му.

С помощью замены $u_i^{(j)} = e^{-\frac{b}{2a_0^{(j)}}x - \frac{b^2}{4a_0^{(j)}}t}v_i^{(j)}$ задачи (8), (9) сводятся к таким:

$$\frac{\partial v_0^{(j)}}{\partial t} = a_0^{(j)} \Delta v_0^{(j)}, \quad v_0^{(j)}\big|_{t=t_{j-1}} = v_0^{(j-1)} e^{\frac{b}{2}\left(x+\frac{bt}{2}\right)\left(\frac{1}{a_0^{(j)}} - \frac{1}{a_0^{(j-1)}}\right)}\Bigg|_{t=t_{j-1}}, \tag{10}$$

$$\frac{\partial v_0^{(j)}}{\partial z} = -q \exp\left(\frac{b}{2a_0^{(j)}} x + \frac{b^2}{4a_0^{(j)}} t\right), \quad v_0^{(j)}\big|_{z=H} = 0.$$

$$\frac{\partial v_1^{(j)}}{\partial t} = a_0^{(j)} \Delta v_1^{(j)} + a_1^{(j)} v_0^{(j)} \left(\Delta v_0^{(j)} - \frac{b}{a_0^{(j)}} \frac{\partial v_0^{(j)}}{\partial x} + \frac{b^2}{4\,(a_0^{(j)})^2} v_0^{(j)}\right) \times$$

$$\times \exp\left(\frac{b}{2a_0^{(j)}} x - \frac{b^2}{4a_0^{(j)}} t\right),$$

$$v_1^{(j)}\big|_{t=t_{j-1}} = v_1^{(j-1)} e^{\frac{b}{2}\left(x+\frac{bt}{2}\right)\left(\frac{1}{a_0^{(j)}} - \frac{1}{a_0^{(j-1)}}\right)}\Bigg|_{t=t_{j-1}} \tag{11}$$

$$\frac{\partial v_1^{(j)}}{\partial z}\Bigg|_{z=0} = 0, \quad v_1^{(j)}\big|_{z=H} = 0,$$

решения которых представим с помощью функции Грина [1]

$$G(x, y, z, t, \xi, \eta, \zeta, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{a_0^{(j)}(t-\tau)}} \times$$

$$\times \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \left(\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta+2nH)^2}{4a_0^{(j)}(t-\tau)}\right) + \right.$$

$$\left. + \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z+\zeta+2nH)^2}{4a_0^{(j)}(t-\tau)}\right)\right).$$

Переходя к цилиндрической системе координат и выполняя при этом некоторые элементарные преобразования, получаем

$$v_0^{(1)}(r, \varphi, z, t) = \frac{q}{2\sqrt{\pi a_0^{(1)}}} e^{\frac{b^2}{4a_0^{(1)}} t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \int_0^t d\tau \int_0^R \tau^{-\frac{3}{2}} \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{b^2}{4a_0^{(1)}}\tau - \frac{r^2+\rho^2+(z+2nH)^2}{4a_0^{(1)}\tau}\right) \times$$

$$\times I_0\left(\frac{\rho\sqrt{(b\tau+r)^2 + 2b\tau r(\cos\varphi - 1)}}{2a_0^{(1)}\tau}\right)\rho\, d\rho,$$

$$v_0^{(2)}(r, \varphi, z, t) = \frac{q}{2\sqrt{\pi a_0^{(2)}}} e^{\frac{b^2}{4a_0^{(2)}} t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \int_0^{t-t_1} \frac{d\tau}{\tau^{3/2}} \times$$

$$\times \int_0^R \exp\left(-\frac{b^2}{4a_0^{(2)}}\tau - \frac{r^2+\rho^2+(z+2nH)^2}{4a_0^{(2)}\tau}\right) \times$$

$$\times I_0\left(\frac{\rho\sqrt{(b\tau+r)^2 + 2b\tau r(\cos\varphi - 1)}}{2a_0^{(2)}\tau}\right)\rho\, d\rho + \frac{e^{\frac{b^2}{4}\left(\frac{1}{a_0^{(2)}} - \frac{1}{a_0^{(1)}}\right) t_1}}{8\,(\pi a_0^{(2)}(t-t_1))^{3/2}} \times$$

$$\times \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \int_0^H d\zeta \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\infty} \rho v_0^{(1)}(\rho, \psi, \zeta, t_1)\, e^{\frac{b}{2}\left(\frac{1}{a_0^{(2)}} - \frac{1}{a_0^{(1)}}\right)\rho\cos\psi} \times$$

$$\times \left(\exp\left(-\frac{r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\varphi-\psi)+(z-\zeta+2nH)^2}{4a_0^{(2)}(t-t_1)}\right) + \right.$$

$$\left. + \exp\left(-\frac{r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\varphi-\psi)+(z+\zeta+2nH)^2}{4a_0^{(2)}(t-t_1)}\right)\right) d\rho.$$

Аналогично получаются решения для $u_0^{(j)}$ $(j = \overline{3, k})$ и $u_i^{(j)}$ $(i = 1, 2, \ldots;$ $j = \overline{1, k})$. При решении задачи (1) — (3) методом сеток рассматривалась плита конечных размеров, на которой кроме условий (3) задавались также условия на боковых поверхностях

$$T|_{x=\pm a} = T_0, \quad T|_{y=\pm a} = T_0. \qquad (12)$$

Конечные размеры плиты выбирали из условия, что дальнейшее увеличение размеров плиты (длины и ширины) не влияло на распределение температуры в плите.

Задачу (1) — (3), (12) решали по явной схеме метода сеток [2] с использованием симметрии относительно плоскости XOZ. Производные в уравнении и граничном условии аппроксимировались с погрешностью $o(h_i^2)$ по

z	Метод малого параметра			Метод сеток		
	$x=0$ $y=0$	$x=-0{,}5$ $y=0$	$x=-1$ $y=0$	$x=0$ $y=0$	$x=-0{,}5$ $y=0$	$x=-1$ $y=0$
0	2012	2083	2075,2	2043,5	2096,8	2077,4
0,5	1398,9	1467,9	1466,1	1450,4	1502,7	1487,4
1	952,71	1006.4	1014,1	1014,4	1063,7	1060,7
1,5	673,49	707,17	707,98	659,74	701,6	710,23
2	475,90	498,25	502,43	459,98	482,73	498,26
2,5	345,27	360,98	365,62	335,78	349,97	355,10
3	247,16	256.93	260,84	242,03	250,92	254,5
3,5	169,14	173,67	175,78	166,65	170,51	172,21

пространственным переменным и с погрешностью $o(\Delta t)$ по временной переменной. Схема учета нелинейностей безытерационная. Для устойчивости вычислений соотношение между шагами Δt и h_i определяли из условия

$$\frac{\Delta t}{\min (h_i)^2} = \frac{1}{6} \frac{\min c(T)}{\max \lambda(T)}.$$

Методом малого параметра найдено $U_{0,i}^{(j)}$ $(j = 1, 2, 3)$ в случае, когда

$$a(u) = \begin{cases} 0{,}13 & \text{при} \quad 0 \leqslant u \leqslant 22\,000, \\ 0{,}14 & \text{при} \quad 22\,000 < u \leqslant 25\,000, \\ 0{,}021 & \text{при} \quad 25\,000 < u \leqslant 40\,000. \end{cases}$$

Для метода сеток теплофизические характеристики тела задавались в виде кусочно-линейных функций температуры. Выбирали шаг сетки по пространственным переменным постоянным ($h = 0{,}0005$ м), а по времени — $\Delta t = 0{,}898082 \cdot 10^{-6}$ч.

В таблице приведены результаты, полученные обоими методами для установившегося теплового режима при $H = 0{,}004$ м, $q = 3{,}36 \cdot 10^7$ ккал/ч $\times$ $\times$ м^2, $R = 0{,}002$ м, $b = 11{,}89$ м/ч, $T_0 = 100°$ С.

1. *Беляев Н. М., Рядно А. А.* Методы нестационарной теплопроводности.— М. : Высш. школа, 1978.— 328 с.
2. *Самарский А. А.* Теория разностных схем.— М. : Наука, 1977.— 656 с.

Львовский университет

Поступила в редколлегию 20.03.81