

С. Ф. Будз, Е. М. Ирза

**ОБ ОПТИМИЗАЦИИ ЗАКАЛОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ
В СТЕКЛЯННОЙ ПЛАСТИНЕ**

Исследуем возможность управления тепловыми условиями процесса закалки тонкой стеклянной пластины. Рассмотрим неоднородную по толщине двухслойную систему, состоящую из стеклянной и металлической пластин, которые находятся в идеальном тепловом контакте. Начало координат поместим в плоскости контакта пластин, ось γ направим перпендикулярно этой плоскости. Система пластин охлаждается с боковых поверхностей, температура которых изменяется во времени и является функцией управления, т. е. граничные тепловые условия будут такими:

$$\begin{aligned} t_1(\gamma, u) &= t^+(u) && \text{при } \gamma = 2h_1, \\ t_1(\gamma, u) &= t_2(\gamma, u) && \text{при } \gamma = 0, \\ \lambda_1 \frac{\partial t_1(\gamma, u)}{\partial \gamma} &= \lambda_2 \frac{\partial t_2(\gamma, u)}{\partial \gamma} && \text{при } \gamma = 0, \\ t_2(\gamma, u) &= t^-(u) && \text{при } \gamma = -2h_2. \end{aligned} \quad (1)$$

Функции $t_1(\gamma, u)$, $t_2(\gamma, u)$ — температуры в стеклянной и металлической пластинах соответственно; γ — координата по толщине системы пластин, отсчитываемая от плоскости контакта; $-2h_2 \leq \gamma \leq 2h_1$; $2h_1$ — толщина стеклянной пластины; $2h_2$ — толщина металлической пластины; $u = \tau/a_1^2 h_1^2$; τ — время; a_1^{-2} — коэффициент температуропроводности стекла. В начальный момент времени температура пластин имеет вид

$$t_1(\gamma, 0) = t_{н1}, \quad t_2(\gamma, 0) = t_{н2}. \quad (2)$$

Ставим задачу об определении такого режима охлаждения системы, при котором распределение закалочных напряжений в стеклянной пластине оптимально близко к заданному. В качестве критерия оптимальности принимаем минимум функционала квадратичного отклонения возникающих при охлаждении напряжений от заданных, т. е.

$$M = \int_0^{2h_1} (\sigma_1(\gamma) - \sigma(\gamma))^2 d\gamma, \quad (3)$$

где $\sigma_1(\gamma)$, $\sigma(\gamma)$ — заданные и возникающие остаточные напряжения соответственно. Принимаем, что температуры по толщине пластин изменяются по кубическому закону [3] и температура в стеклянной пластине является симметричной, т. е. $T_{21} = 0$. Тогда температура стеклянной пластины запишется в виде

$$t_1(\gamma, u) = T_{11} + \frac{1}{2} \left[\frac{(\gamma - h_1)^2}{h_1^2} - \frac{1}{3} \right] \frac{dT_{11}}{du}. \quad (4)$$

Здесь $T_{11} = \frac{1}{2h_1} \int_0^{2h_1} t_1 d\gamma$ — усредненная по толщине стеклянной пластины температура. Температура металлической пластины будет такой:

$$\begin{aligned} t_2(\gamma, u) &= T_{12} + \frac{h}{2} \left[\frac{(\gamma + h_2)^2}{h_2^2} - \frac{1}{3} \right] \frac{dT_{12}}{du} + \frac{\gamma + h_2}{h_2} T_{22} + \frac{k(\gamma + h_2)}{2h_2} \times \\ &\times \left[\frac{(\gamma + h_2)^2}{3h_2^2} - \frac{1}{5} \right] \frac{dT_{22}}{du}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $T_{12} = -\frac{1}{2h_2} \int_{-2h_2}^0 t_2 d\gamma$, $T_{22} = \frac{3}{2h_2} \int_{-2h_2}^0 \gamma t_2 d\gamma$ — усредненная по толщине металлической пластины температура и температурный момент. Функции

T_{11} , T_{12} , T_{22} должны удовлетворять полученным на основе граничных условий (1) уравнениям теплопроводности

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \frac{dT_{11}}{du} + T_{11} &= t^+(u), \\ \frac{1}{3} \frac{dT_{11}}{du} + T_{11} - \frac{k}{15} \frac{dT_{22}}{du} - T_{22} - \frac{k}{3} \frac{dT_{12}}{du} - T_{12} &= 0, \\ \frac{dT_{11}}{du} + \frac{2}{5} k_0 \frac{dT_{22}}{du} + k_1 T_{22} + k_0 \frac{dT_{12}}{du} &= 0, \\ -\frac{k}{15} \frac{dT_{22}}{du} - T_{22} + \frac{k}{3} \frac{dT_{12}}{du} + T_{12} &= t^-(u). \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $k = a_2^2 h_2^2 / a_1^2 h_1^2$; $k_1 = \lambda_2 h_1 / \lambda_1 h_2$; $k_0 = k k_1$; a_1^{-2} , a_2^{-2} , λ_1 , λ_2 — коэффициенты температуро- и теплопроводности стеклянной и металлической пластин соответственно.

В качестве расчетной схемы определения остаточных напряжений примем такую, как в работе [1]. Получим

$$\sigma(\gamma) = \frac{E\alpha}{1-\nu} (\Phi - \bar{\Phi}), \quad (7)$$

где $\bar{\Phi} = \frac{1}{h_1} \int_0^{h_1} \Phi(\gamma) d\gamma$; α — коэффициент линейного температурного расширения; E — модуль упругости; ν — коэффициент Пуассона; Φ — фиктивная функция распределения температур, определяемая на основании гипотезы замораживания градиентов температурных деформаций:

$$\frac{\partial t_1(\gamma, u_g)}{\partial \gamma} = \frac{d\Phi(\gamma)}{d\gamma} \quad \text{при} \quad t_1(\gamma, u_g) = t_g. \quad (8)$$

Здесь u_g — момент времени, когда в заданном сечении с координатой γ достигается температура стеклования t_g .

Оптимизацию режимов охлаждения осуществим для следующего закона распределения остаточных напряжений в стеклянной пластине:

$$\sigma_1(\gamma) = \frac{E\alpha b}{1-\nu} \left[(\gamma - h_1)^2 - \frac{h_1^2}{3} \right], \quad (9)$$

где b — параметр, которым регулируется уровень сжимающих напряжений на поверхностях стеклянной пластины. Методика решения задачи аналогична приведенной в работе [2].

Из условия минимизации функционала (3) и решения системы дифференциальных уравнений (6) выражения для функций T_{11} , T_{12} , T_{22} на промежутке времени $0 \leq u \leq u_n$ (где u_n — момент времени достижения на поверхности стеклянной пластины температуры стеклования t_g) запишутся в виде

$$\begin{aligned} T_{11} &= C_0 + C_1 u + C_2 u^2, \\ T_{12} &= -\frac{1}{15} C_3 e^{\frac{2}{k}u} \left(8 \cos \frac{\sqrt{11}}{k} u + \sqrt{11} \sin \frac{\sqrt{11}}{k} u \right) - \frac{1}{15} C_4 e^{\frac{2}{k}u} \times \\ &\times \left(8 \sin \frac{\sqrt{11}}{k} u - \sqrt{11} \cos \frac{\sqrt{11}}{k} u \right) + C_0 + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{3}{k_1} + 2k \right) C_1 + \\ &+ \frac{2k}{9} \left(2 + \frac{3}{k_1} + k \right) C_2 + \left[C_1 + \frac{2}{3} \left(1 + \frac{3}{k_1} + 2k \right) C_2 \right] u + C_2 u^2, \quad (10) \\ T_{22} &= e^{\frac{2}{k}u} \left[C_3 \cos \frac{\sqrt{11}}{k} u + C_4 \sin \frac{\sqrt{11}}{k} u \right] - k \left[\left(\frac{2}{3} + \frac{8}{15} k + \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{6}{5k_1} \right) C_2 + \left(1 + \frac{1}{k_0} \right) C_1 \right] - 2k \left(1 + \frac{1}{k_0} \right) C_2 u, \end{aligned}$$

а на промежутке времени $u_n \leq u \leq u_k$ (u_k — окончание режима охлаждения) —

$$T_{11} = t_g - 2bh_1^2 \left(u_n + \frac{1}{3} \right) + 2bh_1^2 u + \left[t_{n1} - t_g + 2bh_1^2 \left(\frac{1}{3} - u_n \right) \right] e^{-3u},$$

$$T_{12} = -\frac{1}{15} C_3 e^{\frac{2}{k}(u-u_n)} \left(8 \cos \frac{\sqrt{11}}{k} (u-u_n) + \sqrt{11} \sin \frac{\sqrt{11}}{k} (u-u_n) \right) -$$

$$-\frac{1}{15} C_4 e^{\frac{2}{k}(u-u_n)} \left(8 \sin \frac{\sqrt{11}}{k} (u-u_n) - \right.$$

$$\left. - \sqrt{11} \cos \frac{\sqrt{11}}{k} (u-u_n) \right) + t_g -$$

$$- 2bh_1^2 \left(u_n + \frac{1}{3} \right) +$$

$$+ \frac{2}{3} \left(1 + \frac{3}{k_1} + 2k \right) bh_1^2 + 2bh_1^2 u +$$

$$+ \frac{3(k-5) \left[t_{n1} - t_g + 2bh_1^2 \left(\frac{1}{3} - u_n \right) \right]}{k_1(5+4k+3k^2)} e^{-3u}, \quad (11)$$

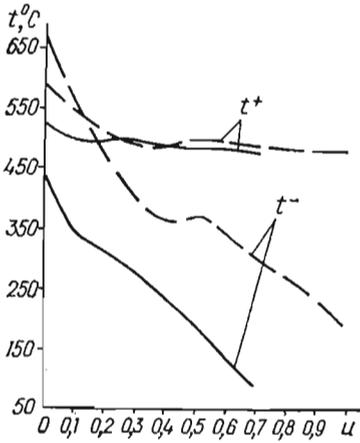


Рис. 1

$$T_{22} =$$

$$= e^{\frac{2}{k}(u-u_n)} \left[C_3 \cos \frac{\sqrt{11}}{k} (u-u_n) + C_4 \sin \frac{\sqrt{11}}{k} (u-u_n) \right] -$$

$$- 2kbb_1^2 \left(1 + \frac{1}{k_0} \right) + \frac{15(1-k) \left[t_{n1} - t_g + 2bh_1^2 \left(\frac{1}{3} - u_n \right) \right]}{k_1(5+4k+3k^2)} e^{-3u}.$$

Произвольные постоянные C_0, C_1, C_2, C_3, C_4 определяются из начальных условий (2) и условий сопряженности температурного поля t_2^* (γ, u) металли-

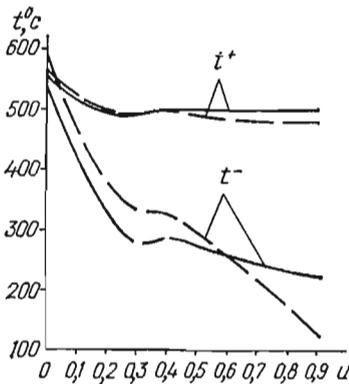


Рис. 2

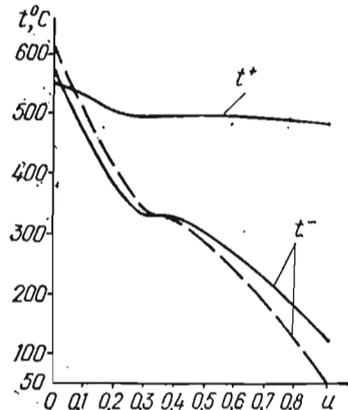


Рис. 3

ческой пластины в момент времени u_n . Имея выражения (10), (11), для T_{11}, T_{12}, T_{22} на основании первого и четвертого уравнений системы (6) определим функции управления t^+ и t^- .

Численный анализ функций управления t^+ и t^- , при которых остаточные напряжения в стеклянной пластине распределяются по квадратичному закону (9), выполнен для следующих значений параметров: $t_{n1} = 900^\circ \text{C}$, $t_{n2} = 465^\circ \text{C}$, $t_g = 500^\circ \text{C}$, $\lambda_1 = 0,39 \cdot 10^{-3} \text{ кал/мм} \cdot \text{с} \cdot \text{град}$, $\lambda_2 = 0,12 \times 10^{-1} \text{ кал/мм} \cdot \text{с} \cdot \text{град}$, $a_1^{-2} = 1,25 \text{ с/мм}^2$, $a_2^{-2} = 0,0752 \text{ с/мм}^2$, $\alpha = 6,9 \times$

$\times 10^{-5}$ 1/град, $E = 6,54 \cdot 10^3$ кг/мм², $h_1 = 5$ мм; $h_2 = 35,40$ мм, $u_n = 0,2$; $0,5$; $b = 2,5 \cdot 10^{-2}$, 0 град/мм².

На рис. 1 приведены графики функций t^+ и t^- в зависимости от времени u_n (сплошные линии для $u_n = 0,2$, штриховые — для $u_n = 0,5$) достижения на поверхностях стеклянной пластины температуры стеклования t_g при заданном уровне сжимающих напряжений ($\sigma(2h_1) = \sigma(0) = -1$ кг/мм²). Из графиков видно, что с уменьшением времени u_n сокращается общая продолжительность процесса закалки. На рис. 2 приведены графики функций t^+ и t^- в зависимости от уровня сжимающих напряжений на поверхностях стеклянной пластины (сплошные линии для $\sigma(2h_1) = \sigma(0) = 0$ кг/мм², штриховые — для $\sigma(2h_1) = \sigma(0) = -1$ кг/мм²). Из графиков следует, что с увеличением уровня сжимающих напряжений, начиная с момента времени стеклования u_n , градиентность функций t^+ и t^- увеличивается. На рис. 3 приведены графики t^+ и t^- для двух толщин металлической пластины $2h_2 = 40$ мм (сплошные линии) и $2h_2 = 35$ мм (штриховая).

1. Бартнев Г. М. Исследование закалки стекла.— Журн. техн. физики, 1949, 19, № 12, с. 1423—1433.
2. Будэ С. Ф., Бурак Я. И., Ирза Е. М. Оптимизация закалочных напряжений в пластинчатых элементах.— Физ.-хим. механика материалов, 1980, № 4, с. 69—72.
3. Підстригач Я. С., Ярема С. Я. Температурні напруження в оболонках.— К.: Вид-во АН УРСР, 1961.— 212 с.

Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию 18.05.81

УДК 518:517.948

М. Я. Бартиш, И. В. Огирко, Л. Л. Роман

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РАСЧЕТА ГИБКИХ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК, НАХОДЯЩИХСЯ В ТЕМПЕРАТУРНОМ ПОЛЕ

Аналогично к численной схеме исследований [2] применим метод Ньютона — Канторовича для случая нелинейной задачи термоупругости. Как известно [3, 5], напряженно-деформированное состояние гибкой пологой оболочки под осесимметричным температурным воздействием сводится к системе двух нелинейных дифференциальных уравнений. Относительно разрешающих функций W^* , Φ^* система имеет вид

$$\frac{d^3\Phi^*}{d\rho^3} + \frac{1}{\rho} \frac{d^2\Phi^*}{d\rho^2} - \frac{1}{\rho^2} \frac{d\Phi^*}{d\rho} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{dW_n^*}{d\rho} + \frac{1}{2} \frac{dW^*}{d\rho} \right) \frac{dW^*}{d\rho} = \frac{1}{\rho} \frac{dq_{T_1}}{d\rho}, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^3W^*}{d\rho^3} + \frac{1}{\rho} \frac{d^2W^*}{d\rho^2} - \frac{1}{\rho^2} \frac{dW^*}{d\rho} - \frac{12(1-\nu^2)}{d\rho} \frac{d\Phi^*}{d\rho} - \frac{d(W^* + W_n^*)}{d\rho} = \\ = -(1+\nu) \frac{dq_{T_2}}{d\rho}, \end{aligned} \quad (2)$$

где приняты следующие безразмерные функции и параметры: $W^* = \frac{W}{h}$, $\Phi^* = \frac{\Phi}{Eh^3}$, $\rho = \frac{r}{a}$, $W_n^* = \gamma(\rho^2 - 1)$, $\gamma = \frac{W_{0n}}{2h}$, $q_{T_1} = \frac{a}{h^2} T_1$, $q_{T_2} = \frac{a^2}{h} T_2$. Здесь W — прогиб оболочки; Φ — функция усилий; ρ — координата по радиусу ($0 \leq r \leq a$); a , h — радиус и толщина оболочки; W_{0n} — начальный подъем оболочки; T_1 — средняя температура по толщине оболочки; T_2 — интегрально характеризует перепад температуры по толщине; ν — коэффициент Пуассона. Суть метода состоит в том, чтобы свести систему