1. *Кит Г. С., Побережный О. В.* Нестационарная задача термоупругости для пластинки с трещиной при наличии теплоотдачи с боковых поверхностей.— Физ.-хим. механика материалов, 1976, 12, № 4, с. 73—78.
2. *Кит Г. С., Побережный О. В.* Интегральные уравнения нестационарных задач теплопроводности для тел с трещинами.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1980, вып. 12, с. 58—63.
3. *Кудрявцев Б. А.* Квазистатическая задача термоупругости для плоскости с полубесконечным разрезом.— Динамика сплошной среды, 1978, вып. 6, с. 29—31.
4. *Кудрявцев Б. А., Партон В. З.* Квазистатическая температурная задача для плоскости с разрезом.— Пробл. прочности, 1970, № 2, с. 46—51.
5. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости.— М. : Наука, 1966.— 707 с.
6. *Нобл Б.* Метод Винера — Хопфа.— М. : Изд-во иностр. лит., 1962.— 279 с.
7. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М.* Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках.— Киев : Наук. думка, 1972.— 308 с.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
31.03.81

УДК 539.377

Б. С. Воробец

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ТЕМПЕРАТУРНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ СО СФЕРИЧЕСКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

Рассмотрим упругое полупространство $z \geqslant 0$, отнесенное к цилиндрической системе координат r, φ, z (рис. 1). В полупространстве на некотором расстоянии d от плоской границы $z = 0$ имеется сферическое включение, отнесенное к сферической системе координат ρ, φ, θ (рис. 1). Включение представляет собой тонкую упругую замкнутую сферическую оболочку толщины $2\delta_0$ с теплопроводным мягким заполнителем (жесткость заполнителя мала по сравнению с жесткостью оболочки и полупространства); при этом в области $\rho \leqslant R_1$ ($R_1 < d$), занятой заполнителем, действуют периодические во времени источники тепла интенсивности

$$q(\tau) = q_1 \exp(i\omega\tau) \quad (\omega,\ q_1 = \mathrm{const}) \qquad (1)$$

(τ — время). На контактирующих поверхностях (полупространство — оболочка, оболочка — заполнитель) выполняются условия идеального теплового контакта. Между оболочкой и полупространством существует жесткое сцепление. На плоской поверхности полупространства $z = 0$, свободной от внешних нагрузок, происходит теплообмен с окружающей средой (температуру которой принимаем равной нулю) по закону Ньютона. При таких условиях и распределении источников тепла (1) температурное поле и напряженно-деформированное состояние системы не будут зависеть от координаты φ. Решения сформулированных выше задач теплопроводности и динамической задачи термоупругости для полупространства с рассматриваемым включением приведены в работе [1]. В этой работе методом последовательных приближений получены решения указанных задач, представленные в виде аналитических соотношений, с помощью которых для значений температуры, перемещений и напряжений в полупространстве, а также усилий и моментов в оболочке определяется любое приближение по предыдущим. В настоящей работе доказывается сходимость этого метода, а также приводятся результаты численных исследований динамических напряжений в полупространстве и усилий в подкрепляющей оболочке.

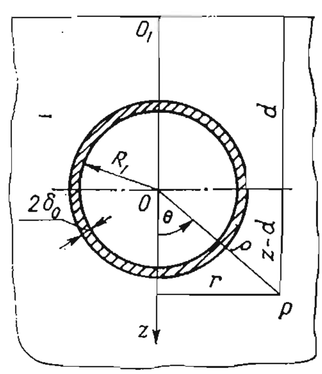

Рис. 1

О сходимости решения. Функции F, H и Ψ, через которые определяются все компоненты, характеризующие термонапряженное состояние рассматриваемой системы, с использованием соотношений $(14)_1$, $(16)_1$ и $(22)_1$ представим в виде *

$$F=\sum_{j=0}^{\infty}F_{2j}+\int_0^{\infty}\frac{\lambda\mu_1-\varepsilon_c}{\lambda\mu_1+\varepsilon_c}e^{-\mu_1(z+d)}\left[\sum_{j=0}^{\infty}F(2j)\right]J_0(\xi r)\frac{\xi}{\mu_1}d\xi,$$

$$H=\sum_{j=0}^{\infty}H_{2j}-\int_0^{\infty}\left\{\frac{2\mu_2}{\lambda\mu_1+\varepsilon_c}e^{-\mu_1 d-\mu_2 z}U_1(\xi)\left[\sum_{j=0}^{\infty}F(2j)\right]+\right.$$
$$+e^{-\mu_2(z+d)}U_2(\xi)\left[\sum_{j=0}^{\infty}H(2j)\right]-$$
$$\left.-\xi^2\mu_2e^{-\mu_3 d-\mu_2 z}U_3(\xi)\left[\sum_{j=0}^{\infty}\Psi(2j)\right]\right\}J_0(\xi r)\frac{\xi}{\mu_2}d\xi, \tag{2}$$

$$\Psi=\sum_{j=0}^{\infty}\Psi_{2j}+\int_0^{\infty}\left\{\frac{\mu_3(\lambda\mu_2+\varepsilon_c)}{\lambda\mu_1+\varepsilon_c}e^{-\mu_1 d-\mu_3 z}U_3(\xi)\left[\sum_{j=0}^{\infty}F(2j)\right]+\right.$$
$$+\mu_3e^{-\mu_2 d-\mu_3 z}U_3(\xi)\left[\sum_{j=0}^{\infty}H(2j)\right]-$$
$$\left.-e^{-\mu_3(z+d)}U_2(\xi)\left[\sum_{j=0}^{\infty}\Psi(2j)\right]\right\}J_0(\xi r)\frac{\xi}{\mu_3}d\xi,$$

$$U_1(\xi)=[\lambda(2\xi^2-m_3^2)^2+4\xi^2\mu_3\varepsilon_c]\Delta^{-1}(\xi),\quad U_2(\xi)=1+8\xi^2\mu_2\mu_3\Delta^{-1}(\xi),$$
$$U_3(\xi)=4(2\xi^2-m_3^2)\Delta^{-1}(\xi),\quad \Delta(\xi)=(2\xi^2-m_3^2)^2-4\xi^2\mu_2\mu_3,$$
$$\mu_p^2=\xi^2-m_p^2\quad(p=1,\ 2,\ 3),\quad m_1^2=-iL\chi R_1^{-2},\quad m_2^2=\chi^2R_1^{-2},$$
$$m_3^2=\eta^2m_2^2,\quad \chi=\omega R_1\alpha^{-1},\quad L=\alpha R_1a^{-1},\quad \eta=\alpha\beta^{-1}.$$

Здесь λ, a и ε_c — коэффициенты теплопроводности, температуропроводности и теплоотдачи соответственно; α, β — скорости распространения упругих волн расширения и искажения; $J_n(x)$ — цилиндрическая функция Бесселя первого рода; $h_n(x)$ — сферическая функция Ханкеля второго рода. Функции F_{2j}, H_{2j}, Ψ_{2j}, $F(2j)$, $H(2j)$ и $\Psi(2j)$ имеют вид $(15)_1$, $(22)_1$ и содержат величины $a_n^{(2j)}$, $b_n^{(2j)}$, $c_n^{(2j)}$, которые определяются из уравнений $(17)_1$, $(23)_1$; соотношения $(23)_1$ связывают коэффициенты $a_n^{(2j+2)}$, $b_n^{(2j+2)}$, $c_n^{(2j+2)}$ с коэффициентами $a_n^{(2j+1)}$, $b_n^{(2j+1)}$ и $c_n^{(2j+1)}$ предыдущего приближения.

Покажем, что ряды, входящие в формулы (2), сходятся. С этой целью предварительно оценим коэффициенты $a_n^{(p)}$, $b_n^{(p)}$, $c_n^{(p)}$ $(p=2j+1;\ 2j+2)$. Из соотношений $(17)_1$ и $(22)_1$ получаем

$$|F(0)|<R_1^3I_0,\quad |H(0)|<R_1^3|b_0^{(0)}m_2^{-1}R_1^{-3}|,\quad I_0=|a_0^{(0)}m_1^{-1}R_1^{-3}|. \tag{3}$$

Используя эти неравенства, а также формулы $(22)_1$, $(23)_1$, для коэффициентов $a_n^{(1)}$, $b_n^{(1)}$ и $c_n^{(1)}$ получим справедливые при больших значениях ξ и n соотношения

$$|a_n^{(1)}|<R_1^3d^{-1}I_0(2n+1)!!(m_1d)^{-n},\quad |b_n^{(1)}|<R_1^3d^{-1}I_1n(2n+1)!!(m_2d)^{-n},$$
$$|c_n^{(1)}|<R_1^3I_1(2n+1)!!(m_3d)^{-n};\quad I_1=(1-\eta^2)^{-1}(I_0+|b_0^{(0)}m_2^{-1}R_1^{-3}|). \tag{4}$$

При $|x|\ll n$ для сферических функций Ханкеля $h_n(x)$ и Бесселя $j_n(x)$ справедливы разложения [2, 3]

$$h_n(x)\sim i(2n-1)!!x^{-n-1},\quad j_n(x)\sim[(2n+1)!!]^{-1}x^n. \tag{5}$$

* Нижний индекс «I» у номера соответствующей формулы указывает, что она взята из работы [1]. Обозначения, если это не оговорено, используются те же, что и в работе [1].

Определив из равенств $(20)_1$, $(23)_1$ постоянные $a_n^{(2)}$, $b_n^{(2)}$, $c_n^{(2)}$ и затем использовав соотношения (4), (5), получим

$$|a_n^{(2)}| < R_1^2 I_0 [(2n-1)!!]^{-1} (m_1 R_1^2 d^{-1})^{n+1}, \quad |b_n^{(2)}| < R_1^2 I_1 n [(2n-1)!!]^{-1} \times$$
$$\times (m_2 R_1^2 d^{-1})^{n+1}, \quad |c_n^{(2)}| < R_1^3 I_1 [(2n-1)!!]^{-1} (m_3 R_1^2 d^{-1})^{n+1}. \tag{6}$$

Наконец, после аналогичных выкладок для любого $j \geqslant 1$ найдем

$$|a_n^{(2j+1)}| < R_1^2 I_0 (R_1 d^{-1})^{j+1} [d(2d-R_1)^{-1}]^{j+n} (2n+1)!! (m_1 d)^{-n},$$
$$|b_n^{(2j+1)}| < R_1^2 I_1 n (R_1 d^{-1})^{4j} [d(2d-R_1)^{-1}]^{4j+n} (2n+1)!! (m_2 d)^{-n}, \tag{7}$$
$$|c_n^{(2j+1)}| < R_1^2 (2d-R_1) I_1 (R_1 d^{-1})^{4j} [d(2d-R_1)^{-1}]^{4j+n} (2n+1)!! (m_3 d)^{-n};$$

$$|a_n^{(2j+2)}| < R_1^2 I_0 [R_1 (2d-R_1)^{-1}]^{j+n} [(2n-1)!!]^{-1} (m_1 R_1)^{n+1},$$
$$|b_n^{(2j-2)}| < R_1^2 I_1 n [R_1 (2d-R_1)^{-1}]^{4j+n} [(2n-1)!!]^{-1} (m_2 R_1)^{n+1}, \tag{8}$$
$$|c_n^{(2j+2)}| < R_1^3 I_1 [R_1 (2d-R_1)^{-1}]^{4j+n+1} [(2n-1)!!]^{-1} (m_3 R_1)^{n+1}.$$

Рассмотрим сходимость ряда $\sum\limits_{j=2}^{\infty} F_{2j}$. С использованием соотношений (5), (8) и $(15)_1$ при $d > R_1$ и $\rho > R_1$ получим

$$\left|\sum_{j=2}^{\infty} F_{2j}\right| < \sum_{j=2}^{\infty} \left[\sum_{n=0}^{\infty} |a_n^{(2j)}| |h_n(m_1\rho)|\right] <$$
$$< R_1^3 (2d-R_1)^{-1} I_0 f [1 - R_1(2d-R_1)^{-1}]^{-1}, \tag{9}$$
$$f = R_1 \rho^{-1} [1 - R_1^2 \rho^{-1} (2d-R_1)^{-1}]^{-1}.$$

Аналогично оцениваются ряды $\sum\limits_{j=2}^{\infty} H_{2j}$ и $\sum\limits_{j=2}^{\infty} \Psi_{2j}$:

$$\left|\sum_{j=2}^{\infty} H_{2j}\right| < R_1^8 \rho^{-1} (2d-R_1)^{-5} I_1 f [1 - R_1^4 (2d-R_1)^{-4}]^{-2},$$
$$\left|\sum_{j=2}^{\infty} \Psi_{2j}\right| < R_1^7 (2d-R_1)^{-5} I_1 f [1 - R_1^4 (2d-R_1)^{-4}]^{-1}. \tag{10}$$

Далее рассмотрим сходимость рядов $\sum\limits_{j=2}^{\infty} F(2j)$, $\sum\limits_{j=2}^{\infty} H(2j)$ и $\sum\limits_{j=2}^{\infty} \Psi(2j)$, которые также содержатся в формулах (2). С использованием соотношений $(22)_1$ и неравенств (8) при больших значениях ξ и n получим

$$\left|\sum_{j=2}^{\infty} F(2j)\right| < m_1^{-1} \sum_{j=2}^{\infty} \left[\sum_{n=0}^{\infty} |a_n^{(2j)}| (n!)^{-1} (2n-1)!! (\mu_1 m_1^{-1})^n\right] <$$
$$< R_1^4 (2d-R_1)^{-1} I_0 [1 - R_1 (2d-R_1)^{-1}]^{-1} e^{R_1\mu_1}. \tag{11}$$

Для рядов $\sum\limits_{j=2}^{\infty} H(2j)$ и $\sum\limits_{j=2}^{\infty} \Psi(2j)$ имеем

$$\left|\sum_{j=2}^{\infty} H(2j)\right| < R_1^9 (2d-R_1)^{-5} I_1 [1 - R_1^4 (2d-R_1)^{-4}]^{-1} \mu_2 e^{R_1\mu_2},$$
$$\left|\sum_{j=2}^{\infty} \Psi(2j)\right| < R_1^9 (2d-R_1)^{-5} I_1 [1 - R_1^4 (2d-R_1)^{-4}]^{-1} e^{R_1\mu_3}. \tag{12}$$

Из неравенств (11), (12) следует сходимость интегралов, содержащихся в формулах (2).

Таким образом, функции F, H и Ψ, записанные в виде (2), представляются сходящимися рядами и интегралами.

Результаты численных исследований. Соответственно решению $(14)_1$ температуру, напряжения в полупространстве, а также усилия и моменты в оболочке запишем в виде

$$t = e^{i\omega\tau}\sum_{j=0}^{\infty}(t_{2j}+t_{2j+1}),\quad \sigma_{km} = e^{i\omega\tau}\sum_{j=0}^{\infty}(\sigma_{km}^{(2j)}+\sigma_{km}^{(2j+1)}),$$

$$N_l = e^{i\omega\tau}\sum_{j=0}^{\infty}(N_l^{(2j)}+N_l^{(2j+1)}),\quad M_l = e^{i\omega\tau}\sum_{j=0}^{\infty}(M_l^{(2j)}+M_l^{(2j+1)}), \qquad (13)$$

где $k,\ l = \rho,\ \varphi,\ \theta;\ r,\ \varphi,\ z$, а величины t_p, $\sigma_{kl}^{(p)}$, $N_l^{(p)}$, $M_l^{(p)}$ $(p = 2j,\ 2j+1)$ определяются соотношениями $(6)_1$, $(7)_1$, $(10)_1$, $(13)_1$, $(15)_1$ — $(23)_1$.

Численно на ЭВМ «Минск-32» исследовалось влияние теплофизических и геометрических параметров заполнителя на амплитуду контактных напряжений, а также усилий в оболочке. Изучали влияние безразмерного параметра частоты χ на амплитуду напряжений и усилий. При вычислениях использовались 4—5 членов разложения (13). Расчеты проводили для следующих значений параметров: $L = 1$, $\eta = \sqrt{3}$, $k_* = 2\delta_0 R_1^{-1} = 0,02$, $\lambda^{(0)} =$

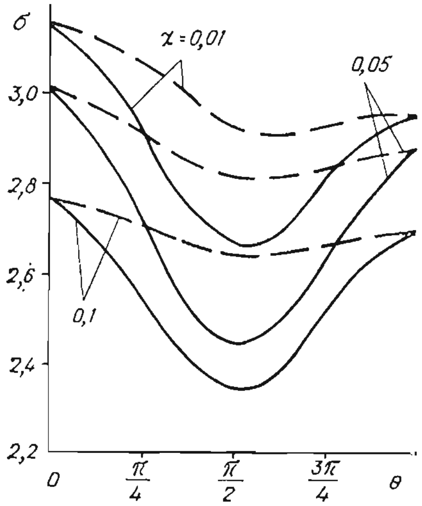

Рис. 2

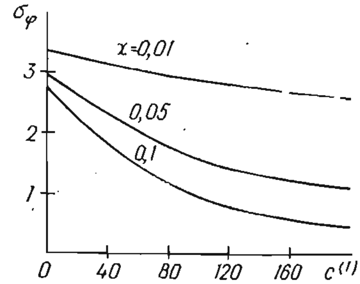

Рис. 3

$= \lambda_0\lambda^{-1} = 0,3$, $c^{(0)} = c_0 c^{-1} = 1,4$, $g^{(0)} = g_0 g^{-1} = 2,8$, $\alpha_*^{(t)} = \alpha_0^{(t)}(\alpha^{(t)})^{-1} = 0,5$, $E^{(0)} = E_0 E^{-1} = 3$, $\mathrm{Bi} = \varepsilon_c R_1 \lambda^{-1} = 1$, $\nu_0 = \nu = 0,3$. Здесь c — теплоемкость; g — плотность; E — модуль Юнга; ν, $\alpha^{(t)}$ — коэффициент Пуассона и линейного температурного расширения соответственно; величины с нижними индексами «0», «1» относятся к оболочке и заполнителю соответственно, а без индекса — к полупространству. Некоторые из полученных результатов приведены на рис. 2—5.

На рис. 2 представлены зависимости от координаты θ амплитуды контактных напряжений σ_θ (сплошные линии) и σ_φ (штриховые); эти кривые получены при $c^{(1)} = c_1 c^{-1} = 0,5$, $d_* = dR_1^{-1} = 4$ для нескольких (указанных на графике) значений параметра χ. По оси ординат здесь откладывалось безразмерное напряжение $\sigma_i = 3\lambda\,(R_1^2 q_1 \alpha^{(t)} G)^{-1}\,\sigma_{ii}$, $i = \theta,\ \varphi$; G — модуль сдвига. Кривые, показанные на рис. 3, 4, иллюстрируют изменение амплитуды контактных напряжений σ_φ и усилий в оболочке N_φ^* в зависимости от отношения теплоемкостей материалов заполнителя и полупространства $c^{(1)}$ при $\chi = 0,01$; $0,05$; $0,1$ и $d_* = 4$, $\theta = 0$, $N_\varphi^* = 3\lambda\,(D_0 R_1^2 q_1 \alpha^{(t)})^{-1}\,N_\varphi$, $D_0 = 2E_0\delta_0\,(1-\nu_0^2)^{-1}$. Исследовали также термоупругое состояние полупространства в окрестности включения в зависимости от расстояния его центра от плоской границы, характеризуемого параметром d_*. На рис. 5 показано изменение амплитуды контактных напряжений σ_θ с изменением координаты θ при различных значениях параметра d_* ($\chi = 0,05$, $c^{(1)} = 0,5$). Из приведенных на рис. 2, 3 графиков следует, что для рассмотренных значений параметров амплитуды контактных напряжений уменьшаются с ростом частоты χ. Аналогичная картина имеет место и для амплитуды усилий в оболочке N_φ^* (см. рис. 4). Полученные результаты (см. рис. 3, 4) показывают существенное влияние параметра $c^{(1)}$

на амплитуды контактных напряжений и усилий в оболочке. Амплитуды этих величин уменьшаются с ростом $c^{(1)}$, что соответствует случаям возрастания теплоемкости материала заполнителя или уменьшения теплоемкости основного материала. В предельном случае $c^{(1)} \to \infty$, как это видно из соотношений $(17)_1$ — $(19)_1$, напряжения и усилия исчезают.

Быстрота сходимости рядов (13) зависит от относительного расстояния центра включения от плоской границы d_*. Так, если при $d_* = 2$ ограничиться 4—5 членами рядов (13), то относительная погрешность составляет 0,5%.

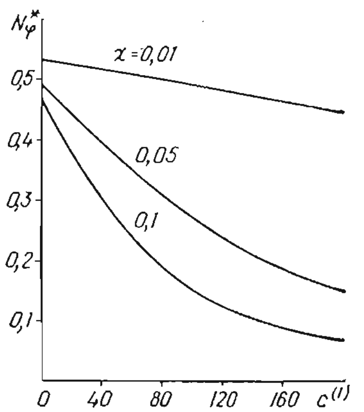

Рис. 4

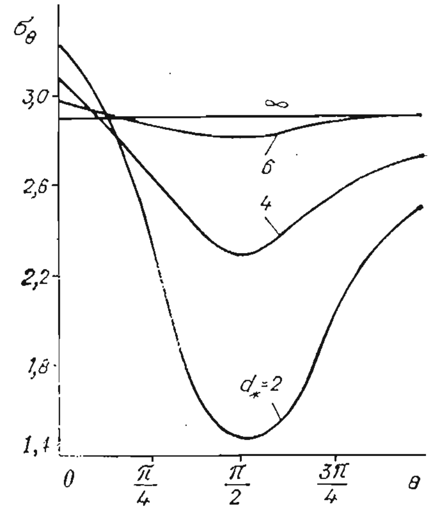

Рис. 5

Если $d_* = 4$, то необходимо взять 3 члена рядов (13) при указанной погрешности. При $d_* \geqslant 6$ достаточно ограничиться первыми членами рядов (13); это свидетельствует о том, что влияние плоской границы при $d_* \geqslant 6$ мало сказывается на распределении напряжений в окрестности включения, а также на величину усилий в оболочке.

1. *Воробец Б. С.* Динамические термонапряжения в полупространстве, вызываемые распределенными в сферическом включении периодическими источниками тепла.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1982, вып. 15, с. 52—57.
2. *Морс Ф. М., Фешбах Г.* Методы теоретической физики : В 2-х т.— М. : Изд-во иностр. лит., 1958—1960.— Т. 1. 930 с. Т. 2. 886 с.
3. *Thiruvenkatachar V. R., Viswanathan K.* Dynamic response of an elastic half-space to time dependent surface tractions over an embedded spherical cavity.— Proc. Roy. Soc. A, 1965, 287, N 1411, p. 549—567.

Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию 04.02.81

УДК 539.377

Н. Н. Тимошенко

К ОПТИМИЗАЦИИ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ СВАРНЫХ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

Рассмотрим тонкие пологие оболочки вращения постоянной толщины $2h$ с начальными остаточными напряжениями, вызванными начальными необратимыми остаточными деформациями $e_{ij}^{(н)}$ $(i, j = 1, 2)$. С целью определения оптимального по напряжениям распределения необратимых остаточных деформаций в рассматриваемой оболочке наряду с заданным распределением начальных необратимых остаточных деформаций $e_{ij}^{(н)}$ рассмотрим распределение

$$e_{ij}^{(0)} = e_{ij}^{(н)} + e_{ij}^{(\partial)}. \qquad (1)$$