на поверхности раздела и аналогичными в объемных фазах, условиями непрерывности векторов перемещений

$$\vec{u}^{+} = \vec{u}^{-} = \vec{u}^{п} \text{ на } A^{п} \tag{21}$$

составляют замкнутую систему уравнений, описывающих механотермодиффузионные, химические и электромагнитные явления в деформируемых электропроводных телах с физическими поверхностями раздела.

Приведенные уравнения в пренебрежении электромагнитными явлениями совпадают с уравнениями работы [2], если в последних не учитывать механические моменты и поперечные силы, а также при соответствующих упрощениях с уравнениями, приведенными в работе [10] для неферромагнитного тела.

1. *Подстригач Я. С., Бурак Я. И., Галапац Б. П., Гнидец Б. М.* Исходные уравнения теории деформации электропроводных твердых растворов.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1975, вып. 1, с. 22—29.
2. *Подстригач Я. С., Шевчук П. Р., Онуфрик Г. М., Повстенко Ю. З.* Поверхностные явления в твердых телах с учетом взаимосвязи физико-механических процессов.— Физ.-хим. механика материалов, 1975, **11**, № 2, с. 36—43.
3. *Русанов А. И.* К теории смачивания упругодеформируемых тел.— Коллоид. журн., 1977, **39**, № 4, с. 711—717.
4. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды : В 2-х т.— М. : Наука, 1973.— Т. 1, 536 с.
5. *Bedeaux D., Albano A. M., Mazur P.* Boundary conditions and non-equilibrium thermodynamics.— Physica A, 1976, **82**, N 3, p. 438—482.
6. *Delhay J. M.* Jump conditions and entropy sources in two — phase systems. Local instant formulation.— Int. J. Multiphase Flow, 1974, **1**, N 3, p. 395—409.
7. *Kovac J.* Non-equilibrium thermodynamics of interfacial systems.— Physica A, 1977, **86**, N 1, p. 1—24.
8. *Maugin G. A., Eringen A. C.* On the equations of the electrodynamics of deformable bodies of finite extent.— J. méc., 1977, **16**, N 1, p. 101—147.
9. *Linford R. G.* The derivation of thermodynamic equations for solid surfaces.— Chem. Rev., 1978, **78**, N 2, p. 81—95.
10. *Wolff P. A., Albano A. M.* Non-equilibrium thermodynamics of interfaces including electromagnetic effects.— Physica A, 1979, **98**, N 3, p. 491—508.

Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию 14.04.81

УДК 539.3

Ю. З. Повстенко

ОБЩИЕ УРАВНЕНИЯ БАЛАНСА НА ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА ДВУХ СРЕД И НА ЛИНИИ РАЗДЕЛА ТРЕХ СРЕД

Начало многочисленных теоретических и прикладных исследований разрывов в сплошных средах положено в работах Н. Е. Кочина [2, 3]. В работе [5] условия на поверхности разрыва получены с учетом возможного существования поверхностных плотностей, однако без дальнейшей конкретизации последних. Одновременно развивалось направление, связанное с изучением физических поверхностей и линий, наделенных определенными физико-механическими свойствами [1, 6]. Рассматриваемые в настоящей работе балансовые уравнения объединяют указанные два подхода в случае поверхностей и линий раздела.

Условимся величины, относящиеся к объемным фазам, отмечать индексами 1, 2, 3; двойные индексы 12, 13, 23 характеризуют поверхности раздела соответствующих двух сред, а индекс 123 — линию раздела трех сред. Рассмотрим изменение во времени экстенсивной величины

$$\Phi_{12} = \int_{\Sigma_{12}} \rho_{12}\varphi_{12} d\Sigma. \tag{1}$$

Указанное изменение обусловлено наличием источников σ_{12} внутри поверхности Σ_{12}, поверхностным потоком $\vec{J}_{12}$ через контур L_{12}, ограничивающий поверхность Σ_{12}, потоками $\vec{J}_1$ и $\vec{J}_2$ из соседних объемных фаз, обменом массой между поверхностной и объемными фазами. Таким образом,

$$\frac{d}{d\tau}\int\limits_{\Sigma_{12}}\rho_{12}\varphi_{12}d\Sigma=\int\limits_{\Sigma_{12}}\sigma_{12}d\Sigma-\int\limits_{L_{12}}\vec{N}_{12}\cdot\vec{J}_{12}dL+\int\limits_{\Sigma_{12}}(\vec{n}_1\cdot\vec{J}_1+\vec{n}_2\cdot\vec{J}_2)\,d\Sigma+$$
$$+\int\limits_{\Sigma_{12}}[\rho_1\varphi_1(\vec{v}_1-\vec{v}_{12})\cdot\vec{n}_1+\rho_2\varphi_2(\vec{v}_2-\vec{v}_{12})\cdot\vec{n}_2]\,d\Sigma. \qquad (2)$$

Здесь ρ — плотность; $\vec{v}$ — скорость; $\vec{n}$ — внешняя нормаль к поверхности; $\vec{N}_{12}$ — внешняя нормаль к контуру L_{12}, лежащая в касательной плоскости к поверхности Σ_{12}.

На основании теоремы о поверхностной дивергенции и формулы дифференцирования поверхностного интеграла по времени получим следующее дифференциальное уравнение баланса [8]:

$$\frac{d\rho_{12}\varphi_{12}}{d\tau}+\rho_{12}\varphi_{12}\vec{\nabla}_\Sigma\cdot\vec{v}_{12}=\sigma_{12}-\vec{\nabla}_\Sigma\cdot\vec{J}_{12}+\vec{n}_1\cdot\vec{J}_1+\vec{n}_2\cdot\vec{J}_2+$$
$$+\rho_1\varphi_1(\vec{v}_1-\vec{v}_{12})\cdot\vec{n}_1+\rho_2\varphi_2(\vec{v}_2-\vec{v}_{12})\cdot\vec{n}_2, \qquad (3)$$

где $\vec{\nabla}_\Sigma$ — поверхностный набла-оператор.

Если положить поверхностные величины равными нулю, то приходим к обычным условиям скачка

$$\vec{n}_1\cdot\vec{J}_1+\vec{n}_2\cdot\vec{J}_2+\rho_1\varphi_1(\vec{v}_1-\vec{v}_{12})\cdot\vec{n}_1+\rho_2\varphi_2(\vec{v}_2-\vec{v}_{12})\cdot\vec{n}_2=0. \qquad (4)$$

Конкретизация источников и потоков приводит к балансовым уравнениям массы, количества движения, энергии, энтропии и т. д. [7, 8].

Для экстенсивной величины

$$\Phi_{123}=\int\limits_{L_{123}}\rho_{123}\varphi_{123}dL \qquad (5)$$

изменение во времени связано с наличием источников σ_{123} внутри линии L_{123}; направленным по касательной $\vec{\lambda}$ к кривой L_{123} потоком $\vec{J}_{123}$ через концы L_{123} (точки A и B); потоками $\vec{J}_{12}$, $\vec{J}_{13}$, $\vec{J}_{23}$ из поверхностных фаз, направленными по соответствующим нормалям $\vec{N}_{ij}$; обменом массой между линейной и поверхностными фазами. Следовательно,

$$\frac{d}{d\tau}\int\limits_{L_{123}}\rho_{123}\varphi_{123}dL=\int\limits_{L_{123}}\sigma_{123}dL-\vec{\lambda}^A\cdot\vec{J}^A_{123}-\vec{\lambda}^B\cdot\vec{J}^B_{123}+$$
$$+\int\limits_{L_{123}}(\vec{N}_{12}\cdot\vec{J}_{12}+\vec{N}_{13}\cdot\vec{J}_{13}+\vec{N}_{23}\cdot\vec{J}_{23})\,dL+\int\limits_{L_{123}}[\rho_{12}\varphi_{12}(\vec{v}_{12}-\vec{v}_{123})\cdot\vec{N}_{12}+$$
$$+\rho_{13}\varphi_{13}(\vec{v}_{13}-\vec{v}_{123})\cdot\vec{N}_{13}+\rho_{23}\varphi_{23}(\vec{v}_{23}-\vec{v}_{123})\cdot\vec{N}_{23}]\,dL. \qquad (6)$$

Дифференцируя линейный интеграл по времени и учитывая линейную теорему о дивергенции $\vec{\lambda}^A\cdot\vec{J}^A_{123}+\vec{\lambda}^B\cdot\vec{J}^B_{123}=\int\limits_{L_{123}}\vec{\nabla}_L\cdot\vec{J}_{123}dL$, где $\vec{\nabla}_L$ — линейный набла-оператор, получаем

$$\frac{d\rho_{123}\varphi_{123}}{d\tau}+\rho_{123}\varphi_{123}\vec{\nabla}_L\cdot\vec{v}_{123}=\sigma_{123}-\vec{\nabla}_L\cdot\vec{J}_{123}+\vec{N}_{12}\cdot\vec{J}_{12}+\vec{N}_{13}\cdot\vec{J}_{13}+$$
$$+\vec{N}_{23}\cdot\vec{J}_{23}+\rho_{12}\varphi_{12}(\vec{v}_{12}-\vec{v}_{123})\cdot\vec{N}_{12}+\rho_{13}\varphi_{13}(\vec{v}_{13}-\vec{v}_{123})\cdot\vec{N}_{13}+$$
$$+\rho_{23}\varphi_{23}(\vec{v}_{23}-\vec{v}_{123})\cdot\vec{N}_{23}. \qquad (7)$$

Двухмерный аналог формулы (4) запишется в виде

$$\vec{N}_{12}\cdot\vec{J}_{12}+\vec{N}_{13}\cdot\vec{J}_{13}+\vec{N}_{23}\cdot\vec{J}_{23}+\rho_{12}\varphi_{12}(\vec{v}_{12}-\vec{v}_{123})\cdot\vec{N}_{12}+$$
$$+\rho_{13}\varphi_{13}(\vec{v}_{13}-\vec{v}_{123})\cdot\vec{N}_{13}+\rho_{23}\varphi_{23}(\vec{v}_{23}-\vec{v}_{123})\cdot\vec{N}_{23}=0. \qquad (8)$$

Выбирая соответствующие выражения источников и потоков, можно получить конкретные уравнения баланса, в частности уравнения баланса количества движения [4].

1. *Гиббс Дж. В.* Термодинамические работы.— М. : Гостехиздат, 1950.— 492 с.
2. *Кочин Н. Е.* О сильных разрывах в сжимаемой жидкости.— Собр. соч. М. : Изд-во АН СССР, 1949, т. 1, с. 68—73.
3. *Кочин Н. Е.* К теории сильных разрывов в жидкости.— Собр. соч. М. : Изд-во АН СССР, 1949, т. 2, с. 5—42.
4. *Повстенко Ю. З.* Уравнения баланса количества движения на линии раздела трех сред.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1980, № 10, с. 45—47.
5. *Седов Л. И.*, Механика сплошной среды.— М. : Наука, 1970.— Т. 1. 492 с.
6. *Cosserat E. et F.* Théorie des corps déformables.— Paris : Hermann, 1909.— 227 p.
7. *Delhaye J. M.* Jump conditions and entropy sources in two — phase systems. Local instant formulation.— Int. J. Multiphase Flow, 1974, **1**, N 3, p. 395—409.
8. *Ghez R.* A generalized Gibbsian surface.— Surface Sci., 1966, **4**, N 2, p. 125—140.

Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию 29.04.81

УДК 532.72

В. С. Еремеев, В. Н. Михайлов, Е. Б. Бойко

АНАЛИЗ УРОВНЯ КОНЦЕНТРАЦИОННЫХ НАПРЯЖЕНИЙ И ИХ ВЛИЯНИЕ НА ПРОЦЕСС МАССОПЕРЕНОСА ПРИ ДИФФУЗИОННОМ НАСЫЩЕНИИ

Твердофазное диффузионное взаимодействие сопровождается объемными изменениями, вызывающими появление концентрационных напряжений. Типичным примером процесса, при котором обсуждаемые явления имеют место, является диффузионное газофазное насыщение металлов. На практике чаще всего реализуется процесс (например, химико-термическая обработка материалов), при котором образование диффузионного слоя происходит на небольшой глубине (до 1 мм). Экспериментальное изучение распределения насыщающего элемента, а также возникающих напряжений в таком тонком слое, естественно, затруднено. Возможность количественного исследования эффектов появилась в связи с развиваемым в последнее время в технике методов получения гидридов металлов путем так называемого сквозного гидрирования [7]. При этом насыщение водородом металлических образцов, имеющих размеры порядка нескольких сантиметров, происходит с поверхности до полного выравнивания концентрации водорода по всему объему. Значительная величина объемных изменений, достигающих 20—30%, а также охрупчивание металла при образовании гидрида вызывает образование трещин (рис. 1), либо вообще разрушение образца, что в ряде случаев нежелательно. Предотвращение растрескивания может быть достигнуто за счет сбалансированного регулирования скоростей наращивания напряжений и их релаксации. В этой связи количественные оценки возникающих напряжений на разных этапах гидрирования, а также степень влияния этих напряжений на диффузию является важной информацией для оптимального управления процессом гидрирования.

Одной из первых попыток анализа напряженного состояния в образцах простой формы при насыщении их водородом является работа [11]. Расчеты проводились в упругом приближении, что намного снижало их практическую ценность. Более поздние исследования основывались на упругой модели с учетом пластического течения [6]. Первая теоретическая работа по влиянию