1. *Балинский А. И., Зорий Л. М.* К исследованию зависимости низших частот деформируемых систем от параметров.— Физ.-хим. механика материалов, 1971, № 3, с. 36—39.
2. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы.— М. : Наука, 1969.—526 с.
3. *Светлицкий В. А., Стасенко И. В.* Сборник задач по теории колебаний.— М. : Высш. школа, 1973.— 450 с.
4. *Таций Р. М.* К построению характеристических рядов многопараметрических континуальных систем.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1976, № 9, с. 819—821.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
27.05.81

УДК 532.6

В. Н. Юзевич

БАЛАНСОВЫЕ СООТНОШЕНИЯ В ДЕФОРМИРУЕМЫХ ЭЛЕКТРОПРОВОДНЫХ СРЕДАХ С ФИЗИЧЕСКИМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ РАЗДЕЛА

Термодинамическое описание поверхностных процессов без учета влияния соседних объемов наиболее полно представлено в работах [3, 9]. Взаимосвязь поверхностных и объемных явлений учитывают, в частности, моделируя приконтактный слой физической поверхностью [2, 9]. В данной работе в отличие от громоздкого операторного метода [2] и метода обобщенных функций [5, 7, 10], который математически не вполне обоснован, предлагается метод получения уравнений, описывающих поверхностные и объемные явления в деформируемых электропроводных телах, основанный на использовании обобщенных теорем Остроградского — Гаусса, Стокса и транспортной.

Пусть в материальном континууме задано поле произвольной экстенсивной скалярной величины, плотность которой a, и векторное поле $\vec{b}$. Тогда для произвольного материального объема $V = V^+ + V^-$, ограниченного замкнутой поверхностью $A = A^+ + A^-$ и разделенного несубстанциональной физической поверхностью $A^п$, наделенной приведенными величинами $a^п$, $\vec{b}^п$ согласно методике, предложенной в работе [4], получим

$$\int_V \vec{b} \cdot d\vec{A} = \int_V \nabla \cdot \vec{b} dV + \int_{A^п} ([\vec{b}] \cdot \vec{N} + \nabla \cdot \vec{b}^п) dA, \tag{1}$$

$$\frac{d}{d\tau} \int_V a dV = \int_V \left(\frac{da}{d\tau} + a\nabla \cdot \vec{v} \right) dV + \int_{A^п} \Big\{ [a(\vec{v} - \vec{v}^п)] \cdot \vec{N} + \frac{da^п}{d\tau} + a^п \nabla \cdot \vec{v}^п \Big\} dA. \tag{2}$$

Здесь и в дальнейшем величины с индексами (+), (—), (п) определены в объемах V^+, V^- и на поверхности $A^п$; $[\vec{b}] = \vec{b}^+ - \vec{b}^-$; $[a(\vec{v} - \vec{v}^п)] = [a^+ (\vec{v}^+ - \vec{v}^п) - a^- (\vec{v}^- - \vec{v}^п)$; $\vec{N}$ — нормаль к поверхности раздела $A^п$, направленная из V^+ в V^-; $\vec{v}^\pm$, $\vec{v}^п$ — скорости центров масс [7]; τ — время.

Отметим, что из соотношений (1), (2) как частные случаи следуют известные теоремы Остроградского — Гаусса и транспортная [6, 8].

Интегральное уравнение баланса массы компонента k для произвольного материального объема V_k имеет вид

$$\frac{d}{d\tau} \int_{V_k} \rho_k dV = \sum_{j=1}^{r} \int_{V_k} \nu_{kj} \zeta_j dV, \tag{3}$$

где ρ_k —плотность компонента k; ζ_j, ν_{kj} — производство массы и стехиометрические коэффициенты j-й химической реакции.

Используя обобщенную транспортную теорему (2), находим

$$\rho^{\pm}\frac{dc_k^{\pm}}{d\tau}+\nabla\cdot\vec{I}_k^{\pm}=\nu_{kj}^{\pm}\zeta_j^{\pm},\quad \rho^{п}\frac{dc_k^{п}}{d\tau}+\nabla\cdot\vec{I}_k^{п}+I_{kN}^{+}-I_{kN}^{-}+$$
$$+\rho^{+}(c_k^{+}-c_k^{п})(v_N^{+}-v_N^{п})-\rho^{-}(c_k^{-}-c_k^{п})(v_N^{-}-v_N^{п})=$$
$$=\nu_{kj}^{п}\zeta_j^{п}\quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n-2),\tag{4}$$

$$\rho^{\pm}\frac{d\omega^{\pm}}{d\tau}+\nabla\cdot\vec{j}^{\pm}=0,\quad \rho^{п}\frac{d\omega^{п}}{d\tau}+\nabla\cdot\vec{j}^{п}+j_N^{+}-j_N^{-}+$$
$$+\rho^{+}(\omega^{+}-\omega^{п})(v_N^{+}-v_N^{п})=\rho^{-}(\omega^{-}-\omega^{п})(v_N^{-}-v_N^{п}),\tag{5}$$

где $\rho^{\pm}=\sum_{k=1}^{n}\rho_k^{\pm}$; $\rho^{п}=\sum_{k=1}^{n}\rho_k^{п}$; $\rho_k^{п}$ — поверхностная плотность компонента k [7]; $c_k^{\pm}=\rho_k^{\pm}/\rho^{\pm}$; $c_k^{п}=\rho_k^{п}/\rho^{п}$; $\vec{v}^{\pm}=\sum_{k=1}^{n}\rho_k^{\pm}\vec{v}_k^{\pm}/\rho^{\pm}$, $\vec{v}^{п}=\sum_{k=1}^{n}\rho_k^{п}\vec{v}_k^{п}/\rho^{п}$ — скорости центров масс; $\vec{I}_k^{\pm}=\rho_k^{\pm}(\vec{v}_k^{\pm}-\vec{v}^{\pm})$, $\vec{I}_k^{п}=\rho_k^{п}(\vec{v}_k^{п}-\vec{v}^{п})$ — диффузионные потоки компонентов k; $\omega^{\pm}=\sum_{k=1}^{n}z_k c_k^{\pm}$; $\omega^{п}=\sum_{k=1}^{n}z_k c_k^{п}$ — электрические заряды, рассчитанные на единицу массы; $\vec{j}^{\pm}=\sum_{k=1}^{n}z_k\vec{I}_k^{\pm}$, $\vec{j}^{п}=\sum_{k=1}^{n}z_k\vec{I}_k^{п}$ — токи проводимости; z_k — электрический заряд единицы массы компонента k. Величины с индексом N обозначают нормальные компоненты соответствующих векторов на границе раздела сред $A^{п}$.

При переходе от интегрального выражения (3) к уравнениям (4) были определены скорости центров масс и диффузионные потоки, что дало возможность вместо n вложенных один в другой континуумов рассматривать один континуум центров масс.

Применяя обобщенные теоремы (1), (2), а также теоремы Стокса и поверхностную транспортную [8] к балансовым соотношениям в интегральной форме на

импульс

$$\frac{d}{d\tau}\int_V(\rho\vec{v}+\vec{D}\times\vec{B})\,dV=\int_A(\hat{\sigma}+\hat{\sigma}_e)\cdot d\vec{A},\tag{6}$$

энтропию

$$\frac{d}{d\tau}\int_V\rho s dV+\int_A\vec{I}_s\cdot d\vec{A}=\int_V\sigma_s dV,\tag{7}$$

полную энергию

$$\frac{d}{d\tau}\int_V\left(\rho U+\frac{\rho v^2}{2}+\frac{D^2}{2\varepsilon_0}+\frac{B^2}{2\mu_0}\right)dV=\int_A\left\{\vec{v}\cdot(\hat{\sigma}+\hat{\sigma}_e)-\right.$$
$$\left.-\vec{I}_Q-\vec{D}\times\vec{B}/\varepsilon_0\mu_0-\Phi\vec{j}-\sum_{k=1}^{n-2}M_k\vec{I}_k\right\}\cdot d\vec{A},\tag{8}$$

а также к уравнениям Максвелла, записанным в интегральной форме в нерелятивистском приближении:

$$\begin{aligned}&\frac{d}{d\tau}\int_{A_1}\vec{B}\cdot d\vec{A}=-\int_L\vec{\mathscr{E}}\cdot d\vec{L},\quad \int_A\vec{D}\cdot d\vec{A}=\int_V\rho\omega dV,\\ &\frac{d}{d\tau}\int_{A_1}\vec{D}\cdot d\vec{A}+\int_{A_1}\vec{j}\cdot d\vec{A}=\int_L\vec{\mathscr{H}}\cdot d\vec{L},\quad \int_A\vec{B}\cdot d\vec{A}=0,\end{aligned}\tag{9}$$

приходим к дифференциальным уравнениям в объемных и поверхностных фазах

$$\rho^{\pm}\frac{d\vec{v}^{\pm}}{d\tau}=\nabla\cdot\hat{\sigma}^{\pm}+\rho^{\pm}\omega^{\pm}\vec{\mathscr{E}}^{\pm}+\vec{j}^{\pm}\times\vec{B}^{\pm},$$

$$\rho^{\text{п}}\frac{d\vec{v}^{\text{п}}}{d\tau}-\rho^{+}(\vec{v}^{+}-\vec{v}^{\text{п}})(v_N^{+}-v_N^{\text{п}})+\rho^{-}(\vec{v}^{-}-\vec{v}^{\text{п}})(v_N^{-}-v_N^{\text{п}})=$$

$$=\nabla\cdot\hat{\sigma}^{\text{п}}+(\hat{\sigma}^{+}-\hat{\sigma}^{-})\cdot\vec{N}+\rho^{\text{п}}\omega^{\text{п}}(\vec{\mathscr{E}}^{+}+\vec{\mathscr{E}}^{-})/2+\vec{j}^{\text{п}}\times(\vec{B}^{+}+\vec{B}^{-})/2; \quad (10)$$

$$\rho^{\pm}\frac{ds^{\pm}}{d\tau}+\nabla\cdot\vec{I}_s^{\pm}=\sigma_s^{\pm},$$

$$\rho^{\text{п}}\frac{ds^{\text{п}}}{d\tau}+\rho^{+}s^{+}(v_N^{+}-v_N^{\text{п}})-\rho^{-}s^{-}(v_N^{-}-v_N^{\text{п}})=\sigma_s^{\text{п}}-\nabla\cdot\vec{I}_s^{\text{п}}-I_{sN}^{+}+I_{sN}^{-}; \quad (11)$$

$$\rho^{\pm}\frac{dU^{\pm}}{d\tau}=-\nabla\cdot\left\{\left(\frac{(D^{\pm})^2}{2\varepsilon_0}+\frac{(B^{\pm})^2}{2\mu_0}\right)\vec{v}^{\pm}\right\}-\sum_{k=1}^{n-2}\nabla\cdot(M_k^{\pm}\vec{I}_k^{\pm})+(\hat{\sigma}^{\pm}+\sigma_e^{\pm}):$$

$$:\nabla\vec{v}^{\pm}+\vec{\mathscr{E}}^{\pm}\cdot(\vec{j}^{\pm}+\rho^{\pm}\omega^{\pm}\vec{v}^{\pm})+\vec{j}^{\pm}\times(\vec{B}^{\pm}\times\vec{v}^{\pm})-\nabla\cdot\vec{I}_Q^{\pm}-\nabla\cdot(\Phi^{\pm}\vec{j}^{\pm}),$$

$$\rho^{\text{п}}\frac{dU^{\text{п}}}{d\tau}=\sum_{\alpha,\beta=1}^{2}\sigma_{\text{п}}^{\alpha\beta}\frac{de_{\alpha\beta}^{\text{п}}}{d\tau}-\left\{\frac{(\vec{v}^{+}-\vec{v}^{\text{п}})^2}{2}+\frac{(D^{+})^2}{\varepsilon_0}+\frac{(B^{+})^2}{\mu_0}\right\}(v_N^{+}-v_N^{\text{п}})+$$

$$+\left\{\frac{(\vec{v}^{-}-\vec{v}^{\text{п}})^2}{2}+\frac{(D^{-})^2}{\varepsilon_0}+\frac{(B^{-})^2}{\mu_0}\right\}(v_N^{-}-v_N^{\text{п}})+\left(\frac{D_N^{+}\vec{D}^{+}}{\varepsilon_0}+\frac{B_N^{+}\vec{B}^{+}}{\mu_0}\right)\cdot\vec{v}^{+}-$$

$$-\left(\frac{D_N^{-}\vec{D}^{-}}{\varepsilon_0}+\frac{B_N^{-}\vec{B}^{-}}{\mu_0}\right)\cdot\vec{v}^{-}-\nabla\cdot(\Phi^{\text{п}}\vec{j}^{\text{п}})-\sum_{k=1}^{n-2}\nabla\cdot(M_k^{\text{п}}\vec{I}_k^{\text{п}})-$$

$$-\sum_{k=1}^{n-2}(M_k^{+}I_{kN}^{+}-M_k^{-}I_{kN}^{-})+\vec{j}^{\text{п}}\cdot\{\vec{D}^{+}+\vec{D}^{-}+\vec{v}^{\text{п}}\times(\vec{B}^{+}+\vec{B}^{-})\}/2+$$

$$+\vec{N}\cdot\{\hat{\sigma}^{+}\cdot(\vec{v}^{+}-\vec{v}^{\text{п}})-\hat{\sigma}^{-}\cdot(\vec{v}^{-}-\vec{v}^{\text{п}})\}-\nabla\cdot\vec{I}_Q^{\text{п}}-I_{QN}^{+}+I_{QN}^{-}-$$

$$-\Phi^{+}j_N^{+}+\Phi^{-}j_N^{-}-\rho^{+}(U^{+}-U^{\text{п}})(v_N^{+}-v_N^{\text{п}})+\rho^{-}(U^{-}-U^{\text{п}})(v_N^{-}-v_N^{\text{п}}); \quad (12)$$

$$\frac{\delta\vec{D}^{\pm}}{\delta\tau}+\vec{j}^{\pm}=\nabla\times\vec{\mathscr{H}}^{\pm},\quad\frac{\delta\vec{B}^{\pm}}{\delta\tau}+\nabla\times\vec{\mathscr{E}}^{\pm}=0,$$

$$\vec{N}\times(\vec{B}^{+}-\vec{B}^{-})/\mu_0=\vec{j}^{\text{п}}+\rho^{\text{п}}\omega^{\text{п}}\vec{v}^{\text{п}}-(\vec{D}^{+}+\vec{D}^{-})v_N^{\text{п}},$$

$$\vec{N}\times(\vec{D}^{+}-\vec{D}^{-})=\varepsilon_0(\vec{B}^{+}-\vec{B}^{-})v_N^{\text{п}},$$

$$\nabla\cdot\vec{D}^{\pm}=\rho^{\pm}\omega^{\pm},\quad\nabla\cdot\vec{B}^{\pm}=0, \quad (13)$$

$$D_N^{+}-D_N^{-}=\rho^{\text{п}}\omega^{\text{п}},\quad B_N^{+}-B_N^{-}=0.$$

Здесь $\vec{D}$, $\vec{B}$ — индуктивности электрического и магнитного полей; $\hat{\sigma}$ — тензор напряжений Коши; $\hat{\sigma}_e=\vec{\mathscr{E}}\vec{D}+\vec{\mathscr{H}}\vec{B}-\hat{1}(\vec{\mathscr{E}}\cdot\vec{D}+\vec{\mathscr{H}}\cdot\vec{B})/2$ — тензор натяжений Максвелла; величины $\vec{\mathscr{E}}$ и $\vec{\mathscr{H}}$ связаны с напряженностями электрического $\vec{E}$ и магнитного $\vec{H}$ полей соотношениями — $\vec{\mathscr{E}}=\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}$, $\vec{\mathscr{H}}=\vec{H}-\vec{v}\times\vec{D}$; s, $\vec{I}_s$, σ_s — массовая плотность, поток и производство энтропии; U — внутренняя энергия единицы массы; $\vec{I}_Q$ — тепловой поток; Φ, M_k — термодинамический электрический [1] и химический потенциалы; ε_0, μ_0— электрическая и магнитная постоянные; A_1 — произвольная материальная поверхность, ограниченная контуром L и разделенная несубстанциональной физической поверхностью $A^{п}$ на две части; $\frac{\delta \vec{b}}{\delta \tau} = \frac{\partial \vec{b}}{\partial \tau} + \nabla \times (\vec{b} \times \vec{v}) + \vec{v}\,(\nabla \cdot \vec{b})$. Уравнения (10) — (13) записаны в приближении неферромагнитного неполяризуемого тела ($\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$, $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$).

Из полученных соотношений видно, что физическая поверхность $A^{п}$ характеризуется такими приведенными характеристиками, как поверхностные: концентрация $c_{к}^{п}$, химический потенциал $M_{к}^{п}$, электрический заряд $\omega^{п}$, термодинамический электрический потенциал $\Phi^{п}$, двухмерные тензоры напряжений $\hat{\sigma}^{п} = \{\sigma_{п}^{\alpha\beta}\}$ и деформаций $\hat{e}^{п} = \{e_{\alpha\beta}^{п}\}$, энтропия $s^{п}$ и внутренняя энергия $U^{п}$.

Учитывая, что в приконтактной области распределение электрических зарядов существенно неоднородно, поверхность $A^{п}$ наряду с указанными выше будем характеризовать дополнительным параметром $Q^{п}$ — моментом распределения электрических зарядов и сопряженным ему $\Psi^{п}$. Для $Q^{п}$ постулируем балансовое уравнение

$$\frac{d}{d\tau} \int_{A^{п}} Q^{п} dA = \int_{A^{п}} f^{п} dA, \tag{14}$$

которое в дифференциальной форме имеет вид

$$\frac{dQ^{п}}{d\tau} + Q^{п} \nabla \cdot \vec{v}^{п} = f^{п}, \tag{15}$$

где $f^{п}$ — производство момента распределения электрических зарядов.

Дифференциал внутренней энергии $U^{п}$ ($s^{п}$, $e_{\alpha\beta}^{п}$, $\omega^{п}$, $c_{к}^{п}$, $Q^{п}$) по аналогии с обьемными фазами [1] определяем уравнением Гиббса

$$dU^{п} = T^{п} ds^{п} + \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \sigma_{п}^{\alpha\beta} de_{\alpha\beta}^{п}/\rho^{п} + \sum_{k=1}^{n-2} M_k^{п} dc_k^{п} + \Phi^{п} d\omega^{п} + \Psi^{п} dQ^{п}/\rho^{п}. \tag{16}$$

Здесь $T^{п}$ — температура физической поверхности [5].

Из балансовых уравнений, а также уравнений Гиббса и вытекающих из них тождеств Эйлера

$$U^{\pm} = T^{\pm} s^{\pm} + \sigma_i^{\pm i}/3\rho^{\pm} + \sum_{k=1}^{n-2} M_k^{\pm} c_k^{\pm} + \Phi^{\pm} \omega^{\pm} + (M_n^{\pm} z_{n-1} - M_{n-1}^{\pm} z_n)/(z_{n-1} - z_n), \tag{17}$$

$$U^{п} = T^{п} s^{п} + \sigma_{\alpha}^{п\alpha}/3\rho^{п} + \sum_{k=1}^{n-2} M_k^{п} c_k^{п} + \Phi^{п} \omega^{п} + \Psi^{п} Q^{п}/\rho^{п} + (M_n^{п} z_{n-1} - M_{n-1}^{п} z_n)/(z_{n-1} - z_n) \tag{18}$$

находим явный вид функций $\sigma_s^{\pm}$, $\sigma_s^{п}$ и в линейном приближении кинетические соотношения, которые ввиду их громоздкости здесь не приведены.

Уравнения (4), (5), (10) — (13), (15) вместе с кинетическими уравнениями, соотношениями Коши

$$\begin{aligned} e_{ij}^{\pm} &= (\nabla_i u_j^{\pm} + \nabla_j u_i^{\pm} - \sum_{k=1}^{3} \nabla_i u_k^{\pm} \nabla_j u^{k\pm})/2, \\ e_{\alpha\beta}^{п} &= \left(\nabla_\alpha u_\beta^{п} + \nabla_\beta u_\alpha^{п} - \sum_{k=1}^{2} \nabla_\alpha u_k^{п} \nabla_\beta u^{kп}\right)/2, \end{aligned} \tag{19}$$

уравнениями состояния

$$\begin{aligned} T^{п} &= \frac{\partial U^{п}}{\partial s^{п}}, \quad \sigma_{п}^{\alpha\beta} = \rho^{п} \frac{\partial U^{п}}{\partial e_{\alpha\beta}^{п}}, \quad \Phi^{п} = \frac{\partial U^{п}}{\partial \omega^{п}}, \\ M_k^{п} &= \frac{\partial U^{п}}{\partial c_k^{п}}, \quad \Psi^{п} = \rho^{п} \frac{\partial U^{п}}{\partial Q^{п}} \end{aligned} \tag{20}$$

на поверхности раздела и аналогичными в объемных фазах, условиями непрерывности векторов перемещений

$$\vec{u}^{+} = \vec{u}^{-} = \vec{u}^{\text{п}} \text{ на } A^{\text{п}} \tag{21}$$

составляют замкнутую систему уравнений, описывающих механотермодиффузионные, химические и электромагнитные явления в деформируемых электропроводных телах с физическими поверхностями раздела.

Приведенные уравнения в пренебрежении электромагнитными явлениями совпадают с уравнениями работы [2], если в последних не учитывать механические моменты и поперечные силы, а также при соответствующих упрощениях с уравнениями, приведенными в работе [10] для неферромагнитного тела.

1. *Подстригач Я. С., Бурак Я. И., Галапац Б. П., Гнидец Б. М.* Исходные уравнения теории деформации электропроводных твердых растворов.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1975, вып. 1, с. 22—29.
2. *Подстригач Я. С., Шевчук П. Р., Онуфрик Г. М., Повстенко Ю. З.* Поверхностные явления в твердых телах с учетом взаимосвязи физико-механических процессов.— Физ.-хим. механика материалов, 1975, **11**, № 2, с. 36—43.
3. *Русанов А. И.* К теории смачивания упругодеформируемых тел.— Коллоид. журн., 1977, **39**, № 4, с. 711—717.
4. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды : В 2-х т.— М. : Наука, 1973.— Т. 1, 536 с.
5. *Bedeaux D., Albano A. M., Mazur P.* Boundary conditions and non-equilibrium thermodynamics.— Physica A, 1976, **82**, N 3, p. 438—482.
6. *Delhay J. M.* Jump conditions and entropy sources in two — phase systems. Local instant formulation.— Int. J. Multiphase Flow, 1974, **1**, N 3, p. 395—409.
7. *Kovac J.* Non-equilibrium thermodynamics of interfacial systems.— Physica A, 1977, **86**, N 1, p. 1—24.
8. *Maugin G. A., Eringen A. C.* On the equations of the electrodynamics of deformable bodies of finite extent.— J. méc., 1977, **16**, N 1, p. 101—147.
9. *Linford R. G.* The derivation of thermodynamic equations for solid surfaces.— Chem. Rev., 1978, **78**, N 2, p. 81—95.
10. *Wolff P. A., Albano A. M.* Non-equilibrium thermodynamics of interfaces including electromagnetic effects.— Physica A, 1979, **98**, N 3, p. 491—508.

Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию 14.04.81

УДК 539.3

Ю. З. Повстенко

ОБЩИЕ УРАВНЕНИЯ БАЛАНСА НА ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА ДВУХ СРЕД И НА ЛИНИИ РАЗДЕЛА ТРЕХ СРЕД

Начало многочисленных теоретических и прикладных исследований разрывов в сплошных средах положено в работах Н. Е. Кочина [2, 3]. В работе [5] условия на поверхности разрыва получены с учетом возможного существования поверхностных плотностей, однако без дальнейшей конкретизации последних. Одновременно развивалось направление, связанное с изучением физических поверхностей и линий, наделенных определенными физико-механическими свойствами [1, 6]. Рассматриваемые в настоящей работе балансовые уравнения объединяют указанные два подхода в случае поверхностей и линий раздела.

Условимся величины, относящиеся к объемным фазам, отмечать индексами 1, 2, 3; двойные индексы 12, 13, 23 характеризуют поверхности раздела соответствующих двух сред, а индекс 123 — линию раздела трех сред. Рассмотрим изменение во времени экстенсивной величины

$$\Phi_{12} = \int\limits_{\Sigma_{12}} \rho_{12}\varphi_{12} d\Sigma. \tag{1}$$

Указанное изменение обусловлено наличием источников σ_{12} внутри поверхности Σ_{12}, поверхностным потоком $\vec{J}_{12}$ через контур L_{12}, ограничивающий