мого метода $H = O(n \log_2 n)$. При этом необходимо использовать $O(n^2)$ процессоров.

4. *Особенности реализации на ЭВМ.* Ранее нами было сделано предположение, что все главные миноры отличны от нуля. Действительно, на первом этапе вычислений достаточно найти одну невырожденную клетку — A_{11}. Далее, если уже вычислены все решения систем вида (10) и (11) из k блоков, то на место $k+1$-й строки ставим ту, у которой детерминант матрицы $A_{s,k+l} - \sum_{i=1}^{k} A_{s,i} Z_{ik}$ $(s = \overline{k+1, n};\ l = \overline{1, n-k})$ отличен от нуля (максимален). И, наконец, на последнем этапе вычисление неизвестных $X_{im} = X_l$ возможно в силу того, что система (1) по условию невырождена.

1. *Воеводин В. В.* Вычислительные основы линейной алгебры.— М. : Наука, 1977.— 303 с.
2. *Недашковский Н. А.* Прямой метод решения систем линейных алгебраических уравнений ветвящимися цепными дробями.— Докл. АН УССР. Сер. А., 1980, № 8, с. 24—28.
3. *Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н.* Параллельные вычисления в линейной алгебре.— Кибернетика, 1977, № 6, с. 28—48.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
15.04.81

УДК 512.8

В. Р. Зелиско

ВОПРОСЫ ФАКТОРИЗАЦИИ МАТРИЧНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

Задача о разложении матричных многочленов на множители, или задача факторизации матричных многочленов, впервые была поставлена в 1956 г. Я. Б. Лопатинским [12]. Им же был получен и первый результат в этом направлении, а именно: приведены необходимые и достаточные условия разложения регулярного матричного многочлена в произведение регулярных множителей, характеристические многочлены которых не имеют общих корней. Дальнейшее развитие этот вопрос получил в работах [4, 5, 7, 11]. Были получены необходимые и достаточные условия для некоторых типов факторизаций матричных многочленов, впервые указаны эффективные методы для фактического нахождения коэффициентов выделяемых из матричного многочлена унитальных множителей, полностью решен вопрос о факторизации матричных двучленов. Другой подход к факторизации заключается в том, чтобы выделить классы матричных многочленов, для которых факторизация всегда осуществима. Таковыми являются матричные многочлены простой структуры и такие, кратности характеристических корней которых не больше двух [6, 11].

Следует отметить, однако, что вопрос о выделении линейного множителя из матричного многочлена эквивалентен решению матричного многочленного уравнения [14]. Последняя задача решалась многими авторами еще в прошлом столетии. Матричные двучленные уравнения изучал Кэли. Его теория была развита дальше Сильвестром, который, в частности, указал на существование решений матричного уравнения $X^p = I$, где I — идемпотентная матрица [17]. Вопрос о решении матричных двучленных уравнений нашел отражение в работах Фробениуса, Диксона, Вейерштрасса.

Хотя в настоящее время проблема выделения регулярного множителя из матричного многочлена полностью решена [7], полученные в данной статье результаты и разработанные здесь методы имеют самостоятельное значение и находят непосредственное применение в вопросах факторизации матричных многочленов, при решении матричных многочленных уравнений, а также будут применены в теории систем дифференциальных уравнений. Используемые в дальнейшем методы факторизации матричных многочленов основаны на введенном П. С. Казимирским понятии значения полиномиальной матрицы на системе корней многочлена [4, 7].

Определение 1. Пусть $G(x)$ — полиномиальная $p \times q$-матрица с элементами из $\mathbb{C}[x]$, а $\varphi(x) = (x-\alpha_1)^{k_1} \dots (x-\alpha_m)^{k_m}$ — некоторый многочлен. Значением полиномиальной матрицы $G(x)$ на системе корней многочлена $\varphi(x)$ называем числовую матрицу

$$M_{G(x)}(\varphi) = \begin{Vmatrix} H_1 \\ H_2 \\ \vdots \\ H_m \end{Vmatrix}, \quad H_i = \begin{Vmatrix} G(\alpha_i) \\ G'(\alpha_i) \\ \vdots \\ G^{(k_i-1)}(\alpha_i) \end{Vmatrix},$$

$i = 1, 2, \dots, m$; $G^{(j)}(x)$ — производные порядка j от матрицы $G(x)$.

Пусть $A(x)$ — неособенная полиномиальная $n \times n$-матрица с элементами из $\mathbb{C}[x]$, которую можно рассматривать и как матричный многочлен

$$A(x) = A_0x^s + A_1x^{s-1} + \cdots + A_s. \tag{1}$$

Обозначим через $\{P(x)\}$ и $\{Q(x)\}$ классы таких обратимых над $\mathbb{C}[x]$ матриц, что для каждой матрицы $P(x)$ из $\{P(x)\}$ существует матрица $Q(x)$ из $\{Q(x)\}$, что

$$P(x)A(x)Q(x) = \operatorname{diag}(\varepsilon_1(x), \dots, \varepsilon_n(x)), \tag{2}$$

где $\varepsilon_i \mid \varepsilon_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots, n-1$. Матрицу $\operatorname{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ называют формой Смита матрицы $A(x)$.

Пусть форма Смита матрицы $A(x)$ представляется в виде

$$\operatorname{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = \operatorname{diag}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)\operatorname{diag}(\psi_1, \dots, \psi_n). \tag{3}$$

Здесь $\varphi_i \mid \varphi_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots, n-1$ и степень многочлена $\varphi = \varphi_1 \dots \varphi_n$ равна nr, $r < s$.

Поставим задачу о представлении матричного многочлена (1) в виде

$$A(x) = B(x)C(x), \tag{4}$$

где $B(x)$ — регулярный матричный многочлен с формой Смита $\operatorname{diag}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ при условии, что формы Смита матриц $C(x)$ и $\operatorname{diag}(\psi_1, \dots, \psi_n)$ совпадают.

Теорема 1. Необходимым и достаточным условием того, чтобы матричный многочлен (1) мог быть представлен в виде (4), где $B(x)$ — регулярный матричный многочлен степени r с формой Смита $\operatorname{diag}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, а $C(x)$ имеет такую же форму Смита, что и матрица $\operatorname{diag}(\psi_1, \dots, \psi_n)$, является существование в классе $\{P(x)\}$ матрицы $P_0(x)$, для которой

$$\operatorname{rang} M_{D_{r-1}(x)}(\varphi) = nr. \tag{5}$$

Здесь

$$D_{r-1}(x) = [\operatorname{diag}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)]_* P_0(x) \| E, Ex, \dots, Ex^{r-1} \|;$$

E — единичная матрица n-го порядка; $[\operatorname{diag}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)]_*$ — взаимная матрица к $\operatorname{diag}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ [1].

Доказательство необходимости. Пусть имеет место представление (4). Согласно [10], существуют неособенная числовая матрица S и обратимые матрицы $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$ такие, что

$$SA(x)Q_1(x) = SB(x)Q_2(x)Q_2^{-1}(x)C(x)Q_1(x), \tag{6}$$

где матрицы $SA(x)Q_1(x)$ и $SB(x)Q_2(x)$ неособенные треугольные с инвариантными множителями по диагонали, а поэтому треугольной является и матрица $Q_2^{-1}(x)C(x)Q_1(x)$, причем согласно соотношению (3) ее диагональными элементами будут полиномы $\psi_1, \dots, \psi_n$. На основании результатов [13] существуют нижние унитреугольные матрицы $U(x)$ и $V(x)$ такие, что

$$U(x)Q_2^{-1}(x)C(x)Q_1(x)V(x) = \operatorname{diag}(\psi_1, \dots, \psi_n). \tag{7}$$

Из равенств (6) и (7) следует

$$SA(x)Q_1(x)V(x) = SB(x)Q_2(x)U^{-1}(x)\operatorname{diag}(\psi_1, \dots, \psi_n). \tag{8}$$

Матрицу $S\ A(x)\,Q_1(x)$ можно представить в виде $T(x)\ \mathrm{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$, где $T(x)$ — нижняя унитреугольная матрица. Учитывая легко доказуемое равенство

$$\mathrm{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)\, V(x) = V_1(x)\, \mathrm{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n), \tag{9}$$

из равенства (8) получаем

$$T(x)\, V_1(x)\, \mathrm{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = SB(x)\, Q_2^{-1}(x)\, U^{-1}(x)\, \mathrm{diag}(\psi_1, \ldots, \psi_n).$$

Разделим с учетом соотношения (3) обе части последнего равенства на $\mathrm{diag}(\psi_1, \ldots, \psi_n)$. Получим

$$S^{-1}T(x)\, V_1(x)\, \mathrm{diag}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) = B(x)\, Q_2(x)\, U^{-1}(x). \tag{10}$$

Обозначим через $P_0(x)$ матрицу $V^{-1}(x)\, T^{-1}(x)\, S$. Легко видеть, что $P_0(x) \in \{P(x)\}$, как и, впрочем, $T^{-1}(x) \in \{P(x)\}$. На основании теоремы 15 [4] из равенства (10) следует условие (5). С помощью этой же теоремы доказывается и достаточность.

Поставленная выше задача свелась, таким образом, к выделению в классе $\{P(x)\}$ таких матриц $P_0(x)$, при которых ранг матрицы

$$M_{[\mathrm{diag}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)],\ P_0(x)\|E, Ex, \ldots, Ex^{r-1}\|}(\varphi)$$

не меняется. Как указано в работе [2], таким свойством обладают матрицы $P_0(x) = G(x)\, P(x)$, где

$$G(x) = \left\| \begin{array}{ccccc} 1 & & & & \\ & & & 0 & \\ \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} g_{21} & 1 & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_1} g_{n1} & \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_2} g_{n2} & \ldots & \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n-1}} g_{n,n-1} & 1 \end{array} \right\|; \tag{11}$$

ε_i — инвариантные множители матрицы $A(x)$:

$$g_{ij} = \begin{cases} t_{ij}^{(0)} + t_{ij}^{(1)}x + \cdots + t_{ij}^{(p_{ij})}x^{p_{ij}}, \quad p_{ij} = \deg \frac{\varphi_i}{\varphi_j} - 1, & \text{если } \psi_j \nmid \psi_i, \\ 0, & \text{если } \psi_j \mid \psi_i; \end{cases}$$

$t_{ij}^{(k)}$ ($i > j$, $k = 0, 1, \ldots, p_{ij}$) — попарно различные независимые переменные; $P(x)$ — произвольная матрица из $\{P(x)\}$.

Отметим, что матрица $V_1(x)$ в соотношении (9) получается из $G(x)$ при определенном выборе многочленов g_{ij}.

Учитывая равенство

$$[\mathrm{diag}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)]_* = \frac{\varphi}{\varphi_n}\, \mathrm{diag}\left(\frac{\varphi_n}{\varphi_1}, \ldots, \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}, 1\right)$$

и свойства матрицы $M_{G(x)}(\varphi)$ (см. утверждение 4 [5]), получаем эквивалентность условия (5) тому, что

$$\mathrm{rang}\, M_{\mathrm{diag}\left(\frac{\varphi_n}{\varphi_1}, \ldots, \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}, 1\right) G(x)P(x)\|E, Ex, \ldots, Ex^{r-1}\|}(\varphi_n) = nr, \tag{12}$$

где $G(x)$ — матрица вида (11), а $P(x)$ — произвольная обратимая матрица из соотношения (2). Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Для того чтобы $A(x) = B(x)\, C(x)$, где $B(x)$ — регулярный матричный многочлен степени r с формой Смита $\mathrm{diag}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, а $C(x)$ имеет ту же форму Смита, что и матрица $\mathrm{diag}(\psi_1, \ldots, \psi_n)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (12).

Для практического вычисления коэффициентов выделяемого унитального ($B_0 = E$) множителя можно использовать следующую теорему.

Теорема 3. В условиях теоремы 2 коэффициенты множителя $B(x) = Ex^r - B_1x^{r-1} - \ldots - B_r$ матричного многочлена $A(x)$ находятся как решения $X_1 = B_1, \ldots, X_r = B_r$ линейного матричного уравнения

$$M_{F_{r-1}(x)}(\varphi_n)\begin{Vmatrix} X_r \\ \vdots \\ X_1 \end{Vmatrix} = M_{F(x)x^r}(\varphi_n). \qquad (13)$$

Здесь

$$F(x) = \operatorname{diag}\left(\frac{\varphi_n}{\varphi_1}, \ldots, \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}, 1\right) G(x) P(x),$$

а

$$F_{r-1}(x) = F(x)\|E, Ex, \ldots, Ex^{r-1}\|.$$

Доказательство теоремы 3 проводится путем использования методов, разработанных в теоремах 15 и 16 из работы [4].

Поскольку выполняется равенство (12), то матрицы $X_1, \ldots, X_r$ определяются из уравнения (13) однозначно, однако следует учесть, что если матрица $G(x)$, а следовательно, и матрицы $M_{F_{r-1}(x)}(\varphi_n)$ и $M_{F(x)x^r}(\varphi_n)$ зависят от конечного числа независимых переменных $t_{ij}^{(k)}$ $(i > j,\ k = 0, 1, \ldots, p_{ij})$, то решения $X_1, \ldots, X_r$ также зависят от этих переменных. Предавая им допустимые значения из $\mathbb{C}$, будем получать частные решения уравнения (13) и строить соответствующие унитальные делители матричного многочлена.

Определение 2. Представление матричного многочлена $A(x)$ в виде $A(x) = B(x)C(x)$, где $B(x)$ и $C(x)$ зависят от конечного числа независимых переменных, будем называть разложением матричного многочлена $A(x)$ в произведение обобщенных множителей.

Таким образом, теоремы 2 и 3 дают критерий разложения матричного многочлена в произведение обобщенных множителей и метод их нахождения в случае, когда $B(x)$ регулярный (в теореме 3 $B(x)$ унитальный) и формы Смита матриц $A(x)$, $B(x)$ и $C(x)$ связаны описанной выше зависимостью.

Исследуем вопрос о факторизации матричного многочлена, при которой произведение форм Смита делителей матричного многочлена равно его же форме Смита. Рассмотрим сначала задачу о выделении из матричного многочлена регулярного множителя. Пусть для формы Смита матричного многочлена (1) справедливо представление

$$\operatorname{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = \operatorname{diag}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)\operatorname{diag}(\psi_1, \ldots, \psi_n), \qquad (14)$$

где $\varphi_i | \varphi_{i+1}$, $\psi_i | \psi_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, $\deg\varphi = nr$, $r < s$. Используя теорему 2 при $G(x) = E$, получаем следующую теорему.

Теорема 4. Для того чтобы матричный многочлен (1) мог быть представлен в виде $A(x) = B(x)C(x)$, где $B(x)$ — регулярный матричный многочлен степени r с формой Смита $\operatorname{diag}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, а $C(x)$ имеет форму Смита $\operatorname{diag}(\psi_1, \ldots, \psi_n)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\operatorname{rang} M_{\operatorname{diag}\left(\frac{\varphi_n}{\varphi_1}, \ldots, \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}, 1\right) P(x)\|E, Ex, \ldots, Ex^{r-1}\|}(\varphi_n) = nr,$$

где $P(x)$ — произвольная обратимая матрица из соотношения (2).

Задача о факторизации вида

$$A(x) = (Ex - B_1)\ \ldots\ (Ex - B_m) F(x), \quad m \leqslant s \qquad (15)$$

в предположении, что форма Смита матричного многочлена $A(x)$ равна произведению форм Смита его сомножителей, решена в работе [3].

Исследуем вопрос о единственности рассмотренных факторизаций.

Теорема 5. Пусть форма Смита $A(x)$ представляется в виде (14). Тогда представление $A(x) = B(x)C(x)$, где $B(x)$ — унитальный матричный многочлен с формой Смита $\operatorname{diag}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, а $C(x)$ имеет форму Смита $\operatorname{diag}(\psi_1, \ldots, \psi_n)$, единственно для каждого фиксированного представления формы Смита матрицы $A(x)$ в виде (14).

Доказательство этой теоремы можно найти в работе [8]. Индукцией по числу выделяемых линейных множителей теорема 5 обобщается на случай факторизации вида (15) [3].

Факторизация вида $A(x) = (Ex - B) C(x)$ равносильна тому, что матричное многочленное уравнение $X^s A_0 + X^{s-1} A_1 + \ldots + A_s = 0$ имеет решением матрицу B [1, 14]. Полученные выше результаты, примененные к этой факторизации, дают возможность находить решения (если, разумеется, они существуют) соответствующих матричных многочленных уравнений.

Другой подход к вопросу о выделении линейного множителя состоит в следующем. Известно [16], что векторы $q_1, \ldots, q_k \in \mathbb{C}^n$, $q_1 \neq 0$ образуют жорданову цепь для матричного многочлена $A(x)$ с корнем α характеристического многочлена $\det A(x)$, если

$$q_j A(\alpha) + \frac{1}{1!} q_{j-1} A'(\alpha) + \cdots + \frac{1}{s!} q_{j-s} A^{(s)}(\alpha) = 0,$$

$$j = 1, 2, \ldots, k, \quad q_0 = q_{-1} = \cdots = q_{-(s-1)} = 0.$$

Теорема 6. Для того чтобы $A(x) = (Ex - B) C(x)$, где

$$\det(Ex - B) = (x - \alpha_1)^{k_1} \ldots (x - \alpha_r)^{k_r}, \quad \sum_{i=1}^{r} k_i = n,$$

необходимо и достаточно, чтобы существовала система n линейно независимых векторов, образующих жордановые цепи для $A(x)$ с корнями $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ характеристического многочлена $\det A(x)$.

Для регулярного матричного многочлена $A(x)$ теорема 6 была доказана в работе [16]. В работах [9, 15] эта теорема доказана для произвольного $A(x)$, причем в работе [9] она получена как следствие из более общего результата о выделении из матричного многочлена так называемых множителей специального вида. В работе [9] предложен также один метод нахождения жордановых цепей, основанный на обобщении введенного в определении 1 понятия значения полиномиальной матрицы на системе корней многочлена, приведены достаточные условия выделения линейного множителя и найден метод его построения.

1. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц.— М. : Наука, 1966.— 576 с.
2. *Зелиско В. Р.* О строении одного класса обратимых матриц.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1980, вып. 12, с. 14—21.
3. *Зелиско В. Р.* О разложении матричного многочлена в произведение линейных множителей.— Укр. мат. журн., 1980, **32**, № 6, с. 807—810.
4. *Казімірський П. С.* Про розклад матричного многочлена на множники.— Укр. мат. журн., 1972, **24**, № 3, с. 315—325.
5. *Казімірський П. С.* Необхідність умов розкладу матричного многочлена на лінійні множники.— Укр. мат. журн., 1977, **29**, № 5, с. 653—658.
6. *Казимирский П. С.* Выделение из матричного многочлена регулярного линейного множителя простой структуры.— В кн.: Теоретические и прикладные вопросы алгебры и дифференциальных уравнений. Киев : Наук. думка, 1976, с. 29—40.
7. *Казимирский П. С.* Решение проблемы выделения регулярного множителя из матричного многочлена.— Укр. мат. журн., 1980, **32**, № 4, с. 483—497.
8. *Казімірський П. С., Зеліско В. Р.* Про виділення з поліноміальної матриці регулярного множника з наперед заданою формою Сміта.— В кн.: Теоретичні та прикладні питання алгебри і диференціальних рівнянь. К. : Наук. думка, 1977, с. 52—61.
9. *Казимирский П. С., Зелиско В. Р.* К выделению линейного множителя из матричного многочлена.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1978, вып. 8, с. 10—16.
10. *Казімірський П. С., Петричкович В. М.* Про еквівалентність поліноміальних матриць.— В кн.: Теоретичні та прикладні питання алгебри і диференціальних рівнянь. К. : Наук. думка, 1977, с. 61—66.
11. *Казимирский П. С. Петричкович В. М.* Разложимость полиномиальных матриц на линейные множители.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1978, вып. 8, с. 3—9.
12. *Лопатинский Я. Б.* Разложение полиномиальной матрицы на множители.— Науч. зап. Льв. политехн. ин-та, 1957, **32**, № 2, с. 3—7.
13. *Feinberg R.* Similarity of partitioned matrices.— J. Res. Nat. Bur. Stand. B, 1975, **79**, N 3/4, p. 117—125.
14. *Ingraham M. H.* Rational methods in matrix equations.— Bull. Amer. Math. Soc., 1941, **47**, p. 61—70.
15 *Lancaster P., Wimmer H.* Zur Theorie der λ-Matrizen.— Math. Nachr. B, 1975, **68**, S. 325—331.

16. *Langer H.* Über Lancaster's Zerlegung von Matrizenscharen.— Arch. Mech. and Anal., 1968, **29**, S. 75—80.
17. *Sylvester*. Sur les racines des matrices unitares.— C. r., 1882, **94**, p. 396—399.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
24.12.80

УДК 517.9 : 539

Б. Я. Андриюк, М. Ф. Стасюк, Р. М. Таций

ПОСТРОЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО РЯДА ЗАДАЧИ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ КВАЗИДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Основы качественной теории квазидифференциальных уравнений, в частности вопросы существования непрерывного решения задачи Коши, изложены в работе [1]. В настоящей статье предлагается конструктивный способ построения фундаментальной системы решений квазидифференциального уравнения второго порядка в виде рядов по параметру. Коэффициенты уравнения считаем кусочно-аналитическими функциями с разрывами первого рода в конечном числе точек интервала [0, 1].

На этом основании удается рекуррентным образом определить коэффициенты характеристического ряда соответствующей задачи на собственные значения, что в свою очередь позволяет применить двусторонние методы к определению ее собственных значений.

Рассмотрим квазидифференциальное уравнение

$$\left(\frac{1}{f(x)}y'\right)' + \lambda m(x) y = 0, \tag{1}$$

где коэффициенты $f(x)$ и $m(x)$ интегрируемые на $[0, 1]$; λ — параметр. Следуя работе [2], можно показать, что уравнение (1) эквивалентно такому:

$$y(x) = \varphi(x) - \lambda \int_0^x K(x, \alpha) m(\alpha) y(\alpha) d\alpha. \tag{2}$$

Здесь $\varphi(x)$ — произвольное решение уравнения

$$\left(\frac{1}{f(x)}y'\right)' = 0, \tag{3}$$

а $K(x, \alpha)$ — функция Коши квазидифференциального уравнения (3), имеющая вид

$$K(\alpha, \alpha) = 0, \quad K_x^{[1]}(\alpha, \alpha) \equiv \frac{1}{f(\alpha)} K'_x(\alpha, \alpha) = 1.$$

Отметим, что квазипроизводная $y^{[1]}(x) \equiv \frac{1}{f(x)} y'(x)$ является решением интегро-дифференциального уравнения

$$y^{[1]}(x) = \varphi^{[1]}(x) - \lambda \int_0^x K_x^{[1]}(x, \alpha) m(\alpha) y(\alpha) d\alpha. \tag{4}$$

Фундаментальную систему решений $y^i(x)$ $(i = 0, 1)$ уравнения (1) ищем в виде

$$y^i(x) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \lambda^j y_j^i(x). \tag{5}$$

Тогда

$$y_0^i = \varphi_i, \quad y_{j+1}^i(x) = \int_0^x K(x, \alpha) m(\alpha) y_j^i(\alpha) d\alpha, \tag{6}$$

причем $\varphi_i(x)$ $(i = 0, 1)$ — фундаментальная система решений уравнения (3).