Вопрос об асимптотическом значении для разности $e^z - R^*_{mn}(z)$ наилучшего равномерного приближения функции e^z в круге $K_R = \{z : |z| \leqslant R\}$, $R > 0$ с помощью рациональных дробей класса $\mathcal{R}_{m,n}$ при фиксированном n и $m \to \infty$ изучен в работе [6]. С использованием асимптотического равенства (2) в работе [2] получена точная по порядку оценка для разности $e^z - R^*_{nn}(z)$, где через $R^*_{nn}(z)$ обозначена рациональная дробь класса $\mathcal{R}_{n,n}$ наилучшего равномерного приближения функции e^z в круге K_R.

Используя асимптотическое равенство (3) и рассуждая так же, как и в работе [2], мож о убедиться в справедливости такой теоремы.

Теорема 2. В круге K_R произвольного радиуса $R > 0$ для величины

$$E_{mn} \overset{\mathrm{df}}{=} \inf_{R_{mn}\in\mathcal{R}_{m,n}} \max_{z\in K_R} |e^z - R_{mn}(z)|$$

наилучшего равномерного приближения функции e^z с помощью рациональных дробей класса $\mathcal{R}_{m,n}$ справедливы неравенства

$$(1 + \alpha_{mn}(R))\, e^{-\frac{2n}{m+n}R} \frac{m!\,n!}{(m+n)!} \frac{R^{m+n+1}}{(m+n+1)!} < E_{mn} <$$

$$< e^{\frac{2n}{m+n}R} \frac{m!\,n!}{(m+n)!} \frac{R^{m+n+1}}{(m+n+1)!} (1 + \gamma_{mn}(R)),$$

где $\alpha_{mn}(R) = o(1)$ и $\gamma_{mn}(R) = o(1)$ при $(m+n) \to \infty$.

1. *Дзядык В. К.* Аппроксимационный метод приближения алгебраическими многочленами решений линейных дифференциальных уравнений.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1974, 38, № 4, с. 937—967.
2. *Дзядык В. К., Философ Л. И.* О скорости сходимости аппроксимаций Паде для некоторых элементарных функций.— Мат. сб., 1978, **107**, № 3 (11), с. 347—363.
3. *Суетин П. К.* Классические ортогональные многочлены.— М. : Наука, 1976.— 327 с.
4. *Luke L.* The special functions and their approximations.— New York : Acad. press, 1969.— Vol. 1.— 693 p.
5. *Perron O.* Die Lehre von den Kettenbruchen.— New York : Chelsea, 1950.— 524 S.
6. *Saff E. B.* The convergence of rational functions of best approximation to the exponential function.— Trans. Amer. Math. Soc., 1972, 32, N 1, p. 187—194.

Луцкий педагогический институт

Поступила в редколлегию 30.10.81

УДК 518 : 512.25

Н. А. Недашковский

ПРЯМОЙ КЛЕТОЧНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

В работе [2] предложен прямой метод решения систем линейных алгебраических уравнений ветвящимися цепными дробями. Он предназначен для решения систем средней размерности и обладает высокой численной устойчивостью. Здесь предлагается клеточный вариант метода, более пригодный для решения больших систем и параллельных вычислений.

Рассмотрим невырожденную систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{Vmatrix} a_{11}a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21}a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot \\ a_{n1}a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{1,n+1} \\ a_{2,n+1} \\ \ldots \\ a_{n\,n+1} \end{Vmatrix}. \qquad (1)$$

Прежде чем переходить к описанию метода, выведем одну вспомогательную формулу. С этой целью систему (1) разобьем произвольным образом на клетки и представим ее в виде

$$\left\|\begin{array}{c:c} A_{11} & A_{12} \\ \hdashline A_{21} & A_{22} \end{array}\right\| \left\|\begin{array}{c} X_1 \\ \hdashline X_2 \end{array}\right\| = \left\|\begin{array}{c} B_1 \\ \hdashline B_2 \end{array}\right\|. \qquad (2)$$

Без ограничения общности предположим все главные миноры отличными от нуля. Тогда для определения X_2 можно записать систему

$$(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})\,X_2 = B_2 - A_{21}A_{11}^{-1}B_1. \qquad (3)$$

В силу тождества

$$DC^{-1} \equiv [(C^{-1})^T D^T]^T \qquad (4)$$

можно записать

$$A_{21}A_{11}^{-1} = \left[\left\|\begin{array}{cccc} a_{11}a_{21} & \ldots & a_{k1} \\ a_{12}a_{22} & \ldots & a_{k2} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1k}a_{2k} & \ldots & a_{kk} \end{array}\right\|^{-1} \left\|\begin{array}{ccc} a_{k+1,1}a_{k+2,1} & \ldots & a_{n1} \\ a_{k+1,2}a_{k+2,2} & \ldots & a_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k+1,k}a_{k+2,k} & \ldots & a_{nk} \end{array}\right\|\right]^T.$$

Легко видеть, что произведение

$$(A_{11}^T)^{-1}\,(a_{k+i,1};\ a_{k+i,2};\ \ldots;\ a_{k+i,k})^T$$

представляет собой решение системы уравнений

$$\left\|\begin{array}{ccc} a_{11}a_{21} & \ldots & a_{k1} \\ a_{12}a_{22} & \ldots & a_{k2} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1k}a_{2k} & \ldots & a_{kk} \end{array}\right\| \left\|\begin{array}{c} x_{k+i,1} \\ x_{k+i,2} \\ \ldots \\ x_{k+i,k} \end{array}\right\| = \left\|\begin{array}{c} a_{k+i,1} \\ a_{k+i,2} \\ \ldots \\ a_{k+i,k} \end{array}\right\|. \qquad (5)$$

Введя обозначение

$$X_1^{(2)} = \left\|\begin{array}{cccc} x_{k+1,1} & x_{k+2,1} & \ldots & x_{n,1} \\ x_{k+1,2} & x_{k+2,2} & \ldots & x_{n,2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{k+1,k} & x_{k+2,k} & \ldots & x_{n,k} \end{array}\right\|, \qquad (6)$$

для определения X_2 получим систему линейных уравнений

$$[A_{22} - (X_1^{(2)})^T A_{12}]\,X_2 = B_2 - (X_1^{(2)})^T B_1. \qquad (7)$$

Эту систему можно решить после того, как будут определены решения систем вида (5). После вычисления X_2 неизвестные X_1 могут быть найдены из системы уравнений

$$A_{22}X_1 = B_2 - A_{21}X_2. \qquad (8)$$

Таким образом, определение решения $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ системы (1) можно свести к решению систем порядка намного меньшего чем n.

Остановимся более детально на алгорифме решения клеточных систем. Для этого представим систему (1) в виде

$$\left\|\begin{array}{c:c:c:c} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1m} \\ \hdashline A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2m} \\ \hdashline \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hdashline A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mm} \end{array}\right\| \left\|\begin{array}{c} X_1 \\ \hdashline X_2 \\ \hdashline \cdots \\ \hdashline X_m \end{array}\right\| = \left\|\begin{array}{c} B_1 \\ \hdashline B_2 \\ \hdashline \cdots \\ \hdashline B_m \end{array}\right\|. \qquad (9)$$

Кроме того, введем в рассмотрение системы линейных алгебраических уравнений

$$\left\| \begin{array}{c:c:c:c} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1k} \\ \hdashline A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2k} \\ \hdashline \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hdashline A_{k1} & A_{k2} & \cdots & A_{kk} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} X_{1k} \\ \hdashline X_{2k} \\ \hdashline \cdots \\ \hdashline X_{kk} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} A_{1,k+1} \\ \hdashline A_{2,k+1} \\ \hdashline \cdots \\ \hdashline A_{k,k+1} \end{array} \right\| \qquad (10)$$

$$\left\| \begin{array}{c:c:c:c} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{k1} \\ \hdashline A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{k2} \\ \hdashline \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hdashline A_{1k} & A_{2k} & \cdots & A_{kk} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} Z_{1k} \\ \hdashline Z_{2k} \\ \hdashline \cdots \\ \hdashline Z_{kk} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} A_{k+1,1} \\ \hdashline A_{k+1,2} \\ \hdashline \cdots \\ \hdashline A_{k+1,k} \end{array} \right\|. \qquad (11)$$

Допустим, что вычислительный процесс находится в таком состоянии, когда все системы, подобные системам (10) и (11), уже решены до порядка $k-1$ включительно. Тогда в силу системы (7) для определения неизвестных Z_{kk} и X_{kk} получаем соотношения

$$Z_{kk} = [A_{kk} - (X_{1,k-1};\ X_{2,k-1};\ \ldots;\ X_{k-1,k-1})(A_{k,1};\ A_{k,2};\ \ldots;\ A_{k,k-1})^T]^{-1} \times$$
$$\times [A_{k+1,k} - (X_{1,k-1};\ X_{2,k-1};\ \ldots;\ X_{k-1,k-1})(A_{k+1,1};\ A_{k+1,2};\ \ldots;\ A_{k+1,k-1})^T], \qquad (12)$$

$$X_{kk} = [A_{k,k} - (Z_{1,k-1};\ Z_{2,k-1};\ \ldots;\ Z_{k-1,k-1})(A_{1,k};\ A_{2,k};\ \ldots;\ A_{k-1,k})^T]^{-1} \times$$
$$\times [A_{k,k+1} - (Z_{1,k-1};\ Z_{2,k-1};\ \ldots;\ Z_{k-1,k-1})(A_{1,k+1};\ A_{2,k+1};\ \ldots;\ A_{k-1,k+1})^T]. \qquad (13)$$

После вычисления Z_{kk} и X_{kk} из неизвестных $X_{i,k-1}$ и $Z_{i,k-1}$ $(i=1, k-1)$ можно понизить порядок системы и по формулам, аналогичным формулам (12) и (13), найти $X_{k-1,k}$ и $Z_{k-1,k}$. Продолжая далее этот процесс на i-м шаге решения систем (10) и (11), получаем рекуррентные соотношения

$$Z_{k-i,k} = \left[A_{k-i,k-i} - \sum_{j=1}^{k-i-1} X_{j,k-i-1}A_{k,j}\right]^{-1} \left[A^{(i)}_{k+1,k-i} - \sum_{j=1}^{k-i-1} X_{j,k-i-1}A^{(i)}_{k+1,j}\right],$$
$$A^{(i)}_{k+1,j} = A_{k+1,j} - \sum_{l=1}^{i-1} A_{k+1,k-l}X_{k-l,k}; \qquad (14)$$

$$X_{k-i,k} = \left[A_{k-i,k-i} - \sum_{j=1}^{k-i-1} Z_{jk-i-1}A_{jk}\right]^{-1} \left[A^{(i)}_{k-i,k+1} - \sum_{j=1}^{k-i-1} Z_{jk-i-1}A^{(i)}_{jk+1}\right],$$
$$A^{(i)}_{j,k+1} = A_{j,k+1} - \sum_{l=1}^{i-1} A_{k-l,k+1}Z_{k-l,k} \qquad (15)$$

для вычисления неизвестных $Z_{k-i,k}$ и $X_{k-i,k}$.

Остановимся на вычислительных характеристиках метода.

1. *Количество операций*. Пусть $n = pm$, т. е. исходная система состоит из блоков p-го порядка. Подсчитаем Q_k — количество операций, необходимых для решения системы, состоящей из k блоков p-го порядка.

Для вычисления произведения $(X_{1,k-i-1};\ X_{2,k-i-1};\ \ldots;\ X_{k-i-1,k-i-1})^T \times$ $\times (A^{(i)}_{k+1,1};\ A^{(i)}_{k+1,2};\ \ldots;\ A^{(i)}_{k+1,k-i-1})$ необходимо затратить $(k-i-1)\,p^3$ умножений и $(k-i-1)\,p^3$ операций сложения (вычитания). Кроме того, для определения $A^{(i)}_{k+1,s}$ также используется по $(k-i-1)\,p^3$ умножений и сложений. Поэтому очевидно, что

$$Q_k = 8\sum_{l=1}^{k} p^3 (k - l + 1) = 8p^3 \sum_{l=1}^{k} l = 4p^3k^2.$$

Всего таких систем будет решено m, а общее количество арифметических операций можно вычислить следующим образом:

$$Q = \sum_{k=1}^{m} Q_k \approx \frac{4}{3} p^3 m^3 = \frac{4}{3} n^3,$$

причем умножений выполнится $\frac{2}{3} n^3$.

2. *Организация обменов.* При решении многих практических задач возникает необходимость определения неизвестных систем большого порядка. Современные ЭВМ обладают ограниченной оперативной памятью. В силу этого начальные данные размещаются на внешних носителях и поочередно используются в процессе вычислений. Поэтому возникает задача минимизации времени, затрачиваемого на обмен информации между внешней и оперативной памятью ЭВМ.

Пусть ЭВМ, на которой используется метод, имеет внешнюю память типа магнитного барабана, диска и т. п. Обозначим через τ и ν соответственно среднее время ожидания и выборки одного слова. Тогда общее время T, затрачиваемое на обмен L словами между оперативной и внешней памятью ЭВМ, можно вычислить по формуле [1] $T = \tau + L\nu$.

Пусть на организацию обменов отведена часть оперативной памяти (кроме ячеек, в которых записана программа) величиной слов. Разобьем систему (1) на блоки порядка $p = \frac{n}{m}$. Тогда на реализацию описанного клеточного метода будет выполнено $\frac{4}{3} \cdot m^3$ обменов. На это потребуется время, которое можно подсчитать по формуле

$$T = \frac{4}{3}(m^3 + p^3)\tau + \frac{4}{3}(m^3 + p^3)L\nu =$$

$$= \frac{4}{3}\left(\frac{n^3}{p^3} + p^3\right)\tau + \frac{4}{3}\left(\frac{n^3}{p^3} + p^3\right)L\nu.$$

Функция $T(p)$ достигает минимума при $p = \sqrt{\frac{n}{3}}$, поэтому, положив $L = 5p^2$, получим

$$T = 7{,}7n^{\frac{3}{2}}\tau + 12{,}8n^{\frac{5}{2}}\nu. \qquad (16)$$

Для оценки проигрыша во времени за счет использования внешней памяти введем коэффициент потерь P, который определим из соотношения $P = (T_k + T)\,T_0^{-1}$. Здесь T — время для выполнения операций в клеточном методе; T — время для обмена информации между внешней и оперативной памятью; T_0 — время, затрачиваемое на выполнение арифметических операций в обычном методе на ЭВМ с неограниченной оперативной памятью. С учетом равенства (16) можно записать

$$P = \left(\frac{4}{3}n^3 + 7{,}7n^{\frac{3}{2}}\tau + 12{,}8n^{\frac{5}{2}}\nu\right)\left(\frac{4}{3}n^3\right)^{-1},$$

и, следовательно, для достаточно больших n коэффициент потерь стремится к единице.

3. *Параллельные вычисления.* В работе [3] показано, что при использовании $D(n)$ процессоров система (1) может быть решена за $D(n \log_2 n)$ тактов работы. С разбиением матрицы A на клетки можно существенно уменьшить высоту алгоритма H. Несложные вычисления показывают, что если матрица системы (1) разбивается на клетки порядка $\sqrt{n}$, то для предлагае-

мого метода $H = O(n \log_2 n)$. При этом необходимо использовать $O(n^2)$ процессоров.

4. *Особенности реализации на ЭВМ*. Ранее нами было сделано предположение, что все главные миноры отличны от нуля. Действительно, на первом этапе вычислений достаточно найти одну невырожденную клетку — A_{11}. Далее, если уже вычислены все решения систем вида (10) и (11) из k блоков, то на место $k+1$-й строки ставим ту, у которой детерминант матрицы $A_{s,k+l} - \sum_{i=1}^{k} A_{s,i} Z_{ik}$ $(s = \overline{k+1,\ n};\ l = \overline{1,\ n-k})$ отличен от нуля (максимален). И, наконец, на последнем этапе вычисление неизвестных $X_{im} = X_l$ возможно в силу того, что система (1) по условию невырождена.

1. *Воеводин В. В.* Вычислительные основы линейной алгебры.— М. : Наука, 1977.— 303 с.
2. *Недашковский Н. А.* Прямой метод решения систем линейных алгебраических уравнений ветвящимися цепными дробями.— Докл. АН УССР. Сер. А., 1980, № 8, с. 24—28.
3. *Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н.* Параллельные вычисления в линейной алгебре.— Кибернетика, 1977, № 6, с. 28—48.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
15.04.81

УДК 512.8

В. Р. Зелиско

ВОПРОСЫ ФАКТОРИЗАЦИИ МАТРИЧНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

Задача о разложении матричных многочленов на множители, или задача факторизации матричных многочленов, впервые была поставлена в 1956 г. Я. Б. Лопатинским [12]. Им же был получен и первый результат в этом направлении, а именно: приведены необходимые и достаточные условия разложения регулярного матричного многочлена в произведение регулярных множителей, характеристические многочлены которых не имеют общих корней. Дальнейшее развитие этот вопрос получил в работах [4, 5, 7, 11]. Были получены необходимые и достаточные условия для некоторых типов факторизаций матричных многочленов, впервые указаны эффективные методы для фактического нахождения коэффициентов выделяемых из матричного многочлена унитальных множителей, полностью решен вопрос о факторизации матричных двучленов. Другой подход к факторизации заключается в том, чтобы выделить классы матричных многочленов, для которых факторизация всегда осуществима. Таковыми являются матричные многочлены простой структуры и такие, кратности характеристических корней которых не больше двух [6, 11].

Следует отметить, однако, что вопрос о выделении линейного множителя из матричного многочлена эквивалентен решению матричного многочленного уравнения [14]. Последняя задача решалась многими авторами еще в прошлом столетии. Матричные двучленные уравнения изучал Кэли. Его теория была развита дальше Сильвестром, который, в частности, указал на существование решений матричного уравнения $X^p = I$, где I — идемпотентная матрица [17]. Вопрос о решении матричных двучленных уравнений нашел отражение в работах Фробениуса, Диксона, Вейерштрасса.

Хотя в настоящее время проблема выделения регулярного множителя из матричного многочлена полностью решена [7], полученные в данной статье результаты и разработанные здесь методы имеют самостоятельное значение и находят непосредственное применение в вопросах факторизации матричных многочленов, при решении матричных многочленных уравнений, а также будут применены в теории систем дифференциальных уравнений. Используемые в дальнейшем методы факторизации матричных многочленов основаны на введенном П. С. Казимирским понятии значения полиномиальной матрицы на системе корней многочлена [4, 7].