и краевыми условиями

$$u(0) = u(1) = u''(0) = u''(1) = 0. \tag{7}$$

Нетрудно убедиться, что операторы L_i ($i = 0, 1, 2$) самосопряженные и удовлетворяют условиям (2). В частности, в третьем условии (2) можно положить $\alpha_1 = (c_2\pi^2 + 1)/2c_3$. Следует отметить, что для удовлетворения условиям (2) не потребовалось никаких дополнительных ограничений на физические параметры задачи.

Таким образом, на основании теоремы 2 получаем

$$\lambda_1 \leqslant \frac{a_1[(L_0y_2, y_2) - (L_2y_1, y_1)] - a_0[(L_1y_2, y_2) + 2(L_2y_1, y_2)]}{a_1[(L_1y_1, y_1) + 2(L_0y_1, y_2)] + a_0[(L_0y_2, y_2) - (L_2y_1, y_1)]}$$

для любых четырежды непрерывно дифференцируемых функций y_1 и y_2, удовлетворяющих граничным условиям (7).

Если положить $y_1 = \sin \pi x$, $y_2 = 2\pi \sin \pi x$ и $a_0 = 1$, $a_1 = -(c_2\pi^2 + 1)/2c_3$, то при $c_1 = c_3 = 1$, $c_2 = 2$ получим $\lambda_1 \leqslant 8{,}130359$ (ошибка $\approx 0{,}6\%$).

1. *Балинский А. И.* Некоторые способы исследования обобщенных задач на собственные значения. Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Львов, 1972.— 12 с.
2. *Гулд С.* Вариационные методы в задачах о собственных значениях. — М. : Мир, 1970.— 328 с.
3. *Коллатц Л.* Задачи на собственные значения (с техническими приложениями).— М. : Наука, 1968.— 504 с.
4. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы.— М. : Наука, 1969.— 400 с.
5. *Тимошенко С. Г.* Колебания в инженерном деле.— М. : Физматгиз, 1959.— 440 с.
6. *Треногин В. А.* Функциональный анализ.— М. : Наука, 1980.— 496 с.
7. *Duffin R.* A minimax theory for overdamped network.— J. Ration. Mech. Anal., 1955, 4, N 2, p. 221—233.

Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию 14.04.81

УДК 517.53

Д. В. Покыньброда, Л. И. Философ

СКОРОСТЬ СХОДИМОСТИ АППРОКСИМАЦИЙ ПАДЕ ЭКСПОНЕНТЫ

В настоящей статье с помощью аппроксимационного метода Дзядыка [1] исследуется скорость стремления к нулю разности между функцией e^z и ее аппроксимациями Паде $\pi_{m,n}(z)$ при $(m + n) \to \infty$. Изучению вопросов сходимости аппроксимаций Паде этой функции посвящен целый ряд работ (см., например, библиографию в работе [2]).

Обозначим через $\mathcal{R}_{m,n}$ класс всех несократимых рациональных дробей вида p_m/q_n, где p_m и q_n — алгебраические многочлены степеней не выше m и n соответственно.

Рациональная дробь $\pi_{m,n} \in \mathcal{R}_{m,n}$ осуществляет аппроксимацию Паде порядка $[m, n]$ голоморфной в точке $z = 0$ функции f, если $\pi_{m,n}$ имеет максимальный (в классе $\mathcal{R}_{m,n}$) порядок касания с f в начале координат.

Перрон [5] установил, что для функции e^z каждый из полиномов Паде $\pi_{m,n}$ имеет вид

$$\pi_{m,n}(z) = \frac{\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (m+n-k)!\, z^k}{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (m+n-k)!\, (-z^k)}. \tag{1}$$

Луке [4] и независимо от него В. К. Дзядык и Л. И. Философ [2] для каждого $z \in \mathbb{C}$ установили асимптотическое равенство

$$e^z - \pi_{n,n}(z) = (-1)^n \frac{(n!)^2}{(2n)!} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} e^z \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right). \tag{2}$$

Теорема 1. При всех $z \in \mathbb{C}$ справедливо асимптотическое равенство

$$e^z - \pi_{m,n}(z) = (-1)^n \frac{m!\,n!}{(m+n)!} \frac{z^{m+n+1}}{(m+n+1)!} e^{\frac{2n}{m+n} z} (1 + \gamma_{m,n}), \tag{3}$$

где $\gamma_{m,n} = \gamma_{m,n}(z) = O\left(\frac{1}{m+n}\right)$ при $(m+n) \to \infty$.

Поскольку доказательство этой теоремы проводится так же, как и доказательство равенства (2) в работе [2], т. е. путем использования аппроксимационного метода приближенного решения линейных дифференциальных уравнений с многочленными коэффициентами [1] и свойств многочленов Якоби, то приведем лишь схему доказательства.

Отметим, что в силу формулы Перрона (1) справедливо равенство $\pi_{n,m}(z) = \frac{1}{\pi_{m,n}(-z)}$, поэтому достаточно установить равенство (3) для случая $0 \leqslant n \leqslant m$, $m \to \infty$.

Пусть $\{L_k^{(0,\alpha)}(t)\}$ — последовательность ортонормированных смещенных многочленов Якоби, т. е. многочлены, удовлетворяющие условию

$$\int_0^1 L_k^{(0,\alpha)}(t) L_\nu^{(0,\alpha)}(t) t^\alpha dt = \delta_{k\nu} \qquad (\alpha > -1),$$

где $\delta_{k\nu}$ — символ Кронекера. Для этих многочленов справедлива формула Родрига

$$L_k^{(0,\alpha)}(t) = t^{-\alpha} (-1)^k \frac{\sqrt{2k+1+\alpha}}{k!} \frac{d^k}{dt^{k-1}} [t^{k+\alpha} (1-t)^k]. \tag{4}$$

Пусть $[0, z]$ — отрезок прямой, соединяющий точки 0 и z. Исходя из интегрального уравнения Вольтерра

$$y(z) = 1 + \int_{[0,z]} y(\zeta)\, d\zeta,$$

которому удовлетворяет функция e^z, при каждом фиксированном $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ и целых неотрицательных n и k, $0 \leqslant k \leqslant n$ ищем алгебраический многочлен $y_{n-1}(\zeta) = c_0 + c_1\zeta + \ldots + c_{n-1}\zeta^{n-1}$ как решение интегрального уравнения

$$y_{n-1}(\zeta) = 1 + \int_{[0,\zeta]} y_{n-1}(\xi)\, d\xi - \tau_n \left(\frac{\zeta}{z}\right)^k L_{n-k}^{(0,k)}\left(\frac{\zeta}{z}\right),$$

где $\zeta \in [0, z]$. Рассуждая так же, как в работе [2], можно получить соотношения

$$\pi_{n,n-k}(z) = y_{n-1}(z) + \tau_n(z) L_{n-k}^{(0,k)}(1),$$

$$e^z - \pi_{n,n-k}(z) = z\tau_n(z) \int_0^1 e^{z(1-t)} L_{n-k}^{(0,k)}(t)\, t^k dt, \tag{5}$$

$$e^\zeta - y_{n-1}(\zeta) = \tau_n \left[\left(\frac{\zeta}{z}\right)^k L_{n-k}^{(0,k)}\left(\frac{\zeta}{z}\right) + \int_{[0,\zeta]} e^{\zeta-\xi} L_{n-k}^{(0,k)}\left(\frac{\xi}{z}\right)\left(\frac{\xi}{z}\right)^k d\xi\right]. \tag{6}$$

Найдем асимптотические равенства для параметра $\tau_n = \tau_n(z)$ и коэффициентов Фурье — Якоби функции e^{zt} по многочленам $L_{n-k}^{(0,k)}(t)$ при $(2n-k) \to \infty$. Интегрированием по частям из формулы (4) получаем

$$\int_0^1 e^{z(1-t)} L_{n-k}^{(0,k)}(t)\, t^k dt = (-1)^{n-k} \frac{\sqrt{2n-k+1}}{(n-k)!} z^{n-k} \int_0^1 e^{z(1-t)} t^n (1-t)^{n-k} dt. \tag{7}$$

Сформулируем в виде леммы легко доказуемое утверждение, которое, на наш взгляд, представляет и самостоятельный интерес.

Лемма. При каждом фиксированном $z \in \mathbb{C}$ справедливо асимптотическое равенство

$$\int_0^1 e^{zt} t^n (1-t)^m \, dt = \frac{n!\, m!}{(n+m+1)!} e^{\frac{n}{n+m} z} \left(1 + O\left(\frac{1}{n+m}\right)\right),$$

где m, n — целые неотрицательные числа и $(m+n) \to \infty$.

Вследствие этой леммы равенство (7) запишем в виде

$$\int_0^1 e^{z(1-t)} L_{n-k}^{(0,k)}(t)\, t^k \, dt = (-z)^{n-k} \frac{\sqrt{2n-k+1}}{(2n-k+1)!} n!\, e^{\frac{n-k}{2n-k} z} \left(1 + O\left(\frac{1}{2n-k}\right)\right). \quad (8)$$

Найдем асимптотическое равенство для параметра $\tau_n(z)$. С этой целью умножим обе части равенства (6) на $\frac{1}{z} L_{n-k}^{(0,k)}\left(\frac{\zeta}{z}\right)$ и проинтегрируем полученное равенство по промежутку $[0, z]$. Имеем

$$\int_0^1 [e^{zt} - y_{n-1}(zt)]\, L_{n-k}^{(0,k)}(t)\, dt = \tau_n(z)\,[1 + \beta_{n,k}(z)], \quad (9)$$

где

$$\beta_{n,k}(z) \stackrel{\text{df}}{=} z \int_0^1 L_{n-k}^{(0,k)}(t)\, dt \int_0^t e^{z(t-u)} L_{n-k}^{(0,k)}(u)\, u^k du.$$

Интегрируя по частям и используя весовые оценки для стандартизованных многочленов Якоби [3], нетрудно убедиться, что

$$\beta_{n,k}(z) = O\left(\frac{1}{2n-k}\right), \quad (2n-k) \to \infty. \quad (10)$$

В силу равенства (6) в левой части равенства (9) разность $e^{zt} - y_{n-1}(zt)$ имеет в точке $t = 0$ нуль кратности k. Учитывая это, на основании ортогональности многочленов $L_{n-k}^{(0,k)}(t)$, формулы Родрига, леммы и равенства

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad p, q > 0$$

получаем

$$\int_0^1 [e^{zt} - y_{n-1}(zt)]\, L_{n-k}^{(0,k)}(t)\, dt = z^n \sqrt{2n-k+1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+n-k)!}{(2n+j-k+1)!} \frac{z^j}{j!} =$$

$$= z^n \frac{\sqrt{2n-k+1}}{n!} \int_0^1 e^{zt} t^{n-k} (1-t)^n dt =$$

$$= z^n \sqrt{2n-k+1} \frac{(n-k)!}{(2n-k+1)!} e^{\frac{n-k}{2n-k} z} \left(1 + O\left(\frac{1}{2n-k}\right)\right). \quad (11)$$

Тогда из формул (9) — (11) находим, что для параметра $\tau_n(z)$ справедливо асимптотическое равенство

$$\tau_n(z) = \sqrt{2n-k+1} \frac{(n-k)!}{(2n-k+1)!} z^n e^{\frac{n-k}{2n-k} z} \left(1 + O\left(\frac{1}{2n-k}\right)\right). \quad (12)$$

Отсюда, учитывая равенства (6), (8) и (12), убеждаемся в справедливости асимптотического равенства

$$e^z - \pi_{n,n-k}(z) = (-1)^{n-k} \frac{n!\,(n-k)!}{(2n-k)!} \frac{z^{2n-k+1}}{(2n-k+1)!} e^{\frac{2(n-k)}{2n-k} z} \left(1 + O\left(\frac{1}{2n-k}\right)\right)$$

при $0 \leqslant k \leqslant n$ и $n \to \infty$. Этим теорема для случая $0 \leqslant n \leqslant m$ доказана. Случай $0 \leqslant m \leqslant n$, как уже отмечалось, сводится к рассмотренному. Теорема 1 полностью доказана.

Вопрос об асимптотическом значении для разности $e^z - R^*_{mn}(z)$ наилучшего равномерного приближения функции e^z в круге $K_R = \{z : |z| \leqslant R\}$, $R > 0$ с помощью рациональных дробей класса $\mathcal{R}_{m,n}$ при фиксированном n и $m \to \infty$ изучен в работе [6]. С использованием асимптотического равенства (2) в работе [2] получена точная по порядку оценка для разности $e^z - R^*_{nn}(z)$, где через $R^*_{nn}(z)$ обозначена рациональная дробь класса $\mathcal{R}_{n,n}$ наилучшего равномерного приближения функции e^z в круге K_R.

Используя асимптотическое равенство (3) и рассуждая так же, как и в работе [2], мож о убедиться в справедливости такой теоремы.

Теорема 2. В круге K_R произвольного радиуса $R > 0$ для величины

$$E_{mn} \overset{\mathrm{df}}{=} \inf_{R_{mn} \in \mathcal{R}_{m,n}} \max_{z \in K_R} |e^z - R_{mn}(z)|$$

наилучшего равномерного приближения функции e^z с помощью рациональных дробей класса $\mathcal{R}_{m,n}$ справедливы неравенства

$$(1 + \alpha_{mn}(R))\, e^{-\frac{2n}{m+n}R} \frac{m!\,n!}{(m+n)!} \frac{R^{m+n+1}}{(m+n+1)!} < E_{mn} <$$

$$< e^{\frac{2n}{m+n}R} \frac{m!\,n!}{(m+n)!} \frac{R^{m+n+1}}{(m+n+1)!} (1 + \gamma_{mn}(R)),$$

где $\alpha_{mn}(R) = o(1)$ и $\gamma_{mn}(R) = o(1)$ при $(m+n) \to \infty$.

1. *Дзядык В. К.* Аппроксимационный метод приближения алгебраическими многочленами решений линейных дифференциальных уравнений.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1974, 38, № 4, с. 937—967.
2. *Дзядык В. К., Философ Л. И.* О скорости сходимости аппроксимаций Паде для некоторых элементарных функций.— Мат. сб., 1978, **107**, № 3 (11), с. 347—363.
3. *Суетин П. К.* Классические ортогональные многочлены.— М. : Наука, 1976.— 327 с.
4. *Luke L.* The special functions and their approximations.— New York : Acad. press, 1969.— Vol. 1.— 693 p.
5. *Perron O.* Die Lehre von den Kettenbruchen.— New York : Chelsea, 1950.— 524 S.
6. *Saff E. B.* The convergence of rational functions of best approximation to the exponential function.— Trans. Amer. Math. Soc., 1972, 32, N 1, p. 187—194.

Луцкий педагогический институт

Поступила в редколлегию 30.10.81

УДК 518 : 512.25

Н. А. Недашковский

ПРЯМОЙ КЛЕТОЧНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

В работе [2] предложен прямой метод решения систем линейных алгебраических уравнений ветвящимися цепными дробями. Он предназначен для решения систем средней размерности и обладает высокой численной устойчивостью. Здесь предлагается клеточный вариант метода, более пригодный для решения больших систем и параллельных вычислений.

Рассмотрим невырожденную систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{Vmatrix} a_{11}a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21}a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{1,n+1} \\ a_{2,n+1} \\ \dots \\ a_{n\,n+1} \end{Vmatrix}. \qquad (1)$$

Прежде чем переходить к описанию метода, выведем одну вспомогательную формулу. С этой целью систему (1) разобьем произвольным образом на клет-