УДК 517.21: 517.946

Н. Н. Боголюбов (мл.), А. К. Прикарпатский

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ К ОПИСАНИЮ ВПОЛНЕ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ РИККАТИ. I

Проблема полной интегрируемости нелинейных дифференциальных уравнений в последнее время стала особенно актуальной в связи с открытием в 1967 г. метода обратной задачи теории рассеяния [23] при анализе нелинейного уравнения Кортевега-де Фриза. После работ [3—6, 9, 14, 16, 17], посвященных периодической задаче для нелинейных эволюционных уравнений типа Кортевега-де Фриза, стала ясной связь исследуемых вопросов с проблемами алгебраической геометрии римановых поверхностей и абелевых многообразий. Так, связь с уравнениями типа Кортевега-де Фриза дала новые нетривиальные факты в самой теории абелевых многообразий (см. [6]), в частности явное описание с помощью аналитических формул универсального расслоения якобиевых многообразий гиперэллиптических римановых поверхностей (например, ранее не был известен даже факт, что пространство этого расслоения унирационально). Достигнутые результаты в случае периодических задач позже были распространены и на другие нелинейные эволюционные уравнения [2, 4, 10, 18], имеющие широкие приложения в современной физике. Аналогичные результаты получены и для нелинейных дифференциально-разностных уравнений [3, 7, 13, 22] (см. также [6]), имеющих приложения, в частности, для проблем численного анализа и теории передачи информации.

Уравнения Шредингера, Кортевега-де Фриза и полная интегрируемость уравнения Риккати. Рассмотрим обычный одномерный оператор Шредингера (Штурма — Лиувилля) $L = -\frac{d^2}{dx^2} + f(x)$, где потенциал $f(x)$ считаем действительной достаточно гладкой функцией переменной $x \in \mathbb{R}^1$, периодической с периодом l. Свяжем с оператором L следующую спектральную задачу: $L\psi = \lambda\psi$ с нулевыми граничными условиями на отрезке $(x_0, x_0 + l)$, где x_0 — произвольная точка на оси $\mathbb{R}^1$. Тогда, как известно [5, 6, 9, 16], для конечно-зонных потенциалов $f(x)$, для которых в спектре оператора Шредингера имеется только конечное число блоховских зон устойчивости (см. [20]), собственные значения $\lambda_j = \lambda_j(x_0)$ $(j = 1, 2, \dots, N)$ удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:

$$\frac{d\lambda_j(x_0)}{dx_0} = \frac{2i\sqrt{P(\lambda_j(x_0))}}{\prod\limits_{i\neq j}(\lambda_j(x_0) - \lambda_i(x_0))}. \tag{1}$$

Здесь $P(z)$ — полином степени $2N+1$, который определяется границами E_j $(j = 1, 2, \dots, 2N+1)$ зон устойчивости спектра оператора $L : P(z) = \prod\limits_{j=1}^{2N+1}(z - E_j)$. При этом собственное значение $\lambda_j(x_0)$ нашей спектральной задачи находится в пределах j-й запрещенной зоны: $\lambda_j(x_0) \in [E_{2j}, E_{2j+1}]$. Дальнейшее построение потенциала $f(x)$ по спектральным данным (обратная периодическая задача) очень просто:

$$f(x) = -2\sum_{j=1}^{N}\lambda_j(x) + \sum_{j=1}^{2N+1}E_j, \tag{2}$$

если систему уравнений (1) можно разрешить явно, т. е. проинтегрировать

Рассмотрим теперь блоховскую собственную функцию $\psi(x, x_0, \lambda)$, определяемую условием

$$\psi(x+l, x_0, \lambda) = \exp(\pm ip(\lambda))\,\psi(x, x_0, \lambda), \quad \psi(x_0, x_0, \lambda) = 1, \tag{3}$$

где функция $p(\lambda)$ называется квазиимпульсом. Разрешенные зоны в спектре оператора Шредингера определяются теми $\lambda \in \mathbb{R}^1$, где функция $p(\lambda)$ действительная и функция $\psi(x, x_0, \lambda)$ почти периодическая по x. Дополнения к разрешенным зонам будут запрещенными зонами, или зонами неустойчивости. В работах [1, 5, 9, 12] доказана следующая теорема.

Теорема 1. Блоховская собственная функция $\psi(x, x_0, \lambda)$, определенная условием (3) при любом (комплексном и вещественном) гладком периодическом потенциале $f(x)$, мероморфна на римановой поверхности Γ, двулистно накрывающей λ-плоскость и имеющей точки ветвления (для вещественного потенциала) в концах зон. Вообще эта риманова поверхность имеет бесконечный алгебраический род, однако если число лакун конечно, то риманова поверхность Γ гиперэллиптична, имеет конечный род, равный числу лакун, и определяется алгебраической кривой $z^2 + P(\lambda) = 0$; $z, \lambda \in \mathbb{C}^1$.

Рассмотрим логарифмический дифференциал блоховской собственной функции $\Omega = \frac{d \ln \psi}{d\lambda}\, d\lambda$, который обладает такими свойствами:

(i) имеет полюсы с вычетами -1 в точках $P_j(x_0) \in \Gamma$;

(ii) имеет полюсы с вычетами $+1$ в точках $P_j(x) \in \Gamma$;

(iii) имеет полюс второго порядка в точке $\lambda = \infty \in \Gamma$,

имеющий вид в локальном параметре t: $\omega \sim -i(x - x_0)\, dt\, t^{-2}$, где $t = k^{-1} = \lambda^{-\frac{1}{2}}$, так как $\psi(x, x_0, \lambda) \sim \exp(ik(x - x_0))$ при $\lambda \to \infty$;

(iv) все интегралы по циклам a_i, b_j, образующим базис одномерной группы гомологий многообразия Γ [8, 19], являются целыми кратными $2\pi i$, так как $\psi(x, x_0, \lambda)$ — однозначная функция на поверхности Γ.

Указанные свойства абелевого дифференциала Ω полностью определяют функцию $\psi(x, x_0, \lambda)$, проекция $\pi\colon \Gamma \to \mathbb{C}^1$ римановой поверхности Γ на комплексную плоскость $\mathbb{C}^1$ обладает свойством $\pi P_j(x_0) = \lambda_j(x_0)$, причем набор точек $(P_1(x), P_2(x), \ldots, P_N(x))$ движется прямолинейно при изменении x по многообразию Якоби $J(\Gamma)$ многообразия Γ. Результат такой (см. [6]):

$$\psi(x, x_0, \lambda) = \exp(i\omega(\lambda)x)\, \frac{\vartheta(\vec{A}(\lambda) + x\vec{u} + \vec{l}(0))\,\vartheta(\vec{l}(0))}{\vartheta(\vec{A}(\lambda) + \vec{l}(0))\,\vartheta(x\vec{u} + \vec{l}(0))}, \tag{4}$$

где

$$\omega(\lambda) = \sum_{k=0}^{N} c_k \int_{E_{2N+1}}^{\lambda} z^k [P(z)]^{-\frac{1}{2}}\, dz; \quad (A(\lambda))_j = \int_{\infty}^{\lambda} d\omega_j(\lambda);$$

$$\oint_{a_k} d\omega(\lambda) = 0; \quad u_j = \oint_{b_j} d\omega(\lambda); \quad \oint_{b_j} d\omega_i(\lambda) = B_{ij};$$

$$l_j(0) = \sum_{i=1}^{N} \omega_j(\lambda_i(x_0)) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} B_{ij} - \frac{j}{2};$$

ω_j ($j = 1, 2, \ldots, N$) — базис нормированных абелевых интегралов первого рода на поверхности Γ; $\vartheta(\vec{u})$ — многомерная тэта-функция Римана, определяемая выражением

$$\vartheta(\vec{u}) = \sum_{\vec{m} \in Z^N} \exp\{2\pi i(\vec{m}, \vec{u}) + \pi i(B\vec{m}, \vec{m})\}.$$

Здесь Z^N — множество целочисленных векторов в $\mathbb{R}^N$; $\vec{u} \in \mathbb{C}^N$ и $(.,.)$ — обычное скалярное произведение.

Определим функцию $y = -\frac{d}{dx} \ln \psi(x, x_0 \lambda)$. Тогда, исходя из уравнения Шредингера $L\psi = \lambda\psi$, на функцию $y = y(x)$ находим уравнение

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + \lambda - f(x), \tag{5}$$

т. е. уравнение Риккати. При этом согласно формуле (2) функцию $f(x)$ можно представить в виде [9]

$$f(x) = -2 \frac{d^2}{dx^2} \ln \vartheta ((x - x_0) \vec{u} + \vec{l}(0)) + \sum_{j=1}^{2N+1} E_j - 2 \sum_{j=1}^{N} \oint_{a_j} \lambda d\omega_j(\lambda). \tag{6}$$

С другой стороны, из результатов работы [17] следует, что функция $f(x)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению (стационарному уравнению Кортевега-де Фриза)

$$6f \frac{df}{dx} - \frac{d^3 f}{dx^3} = 0. \tag{7}$$

Итак, можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 2. Пусть задано обыкновенное дифференциальное уравнение Риккати (5). Тогда если функция $f(x)$ удовлетворяет тождественно нелинейному уравнению (7), то это уравнение Риккати является вполне интегрируемым и его решение находится по формуле $y = -\frac{d}{dx} \ln \psi$, где функция ψ определяется по формуле (4).

Из результатов работ [5, 9, 17] следует, что если функция $f(x) = f(x, t)$ зависит от переменной t как от параметра, то уравнение Риккати (5) будет вполне интегрируемым, если функция $f(x, t)$ удовлетворяет уравнению Кортевега-де Фриза

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 6f \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}.$$

Из теоремы 2 следует частичное решение проблемы Лиувилля для уравнений Риккати: описать класс $\mathcal{R}$ функций $f(x)$, для которых уравнение Риккати

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + f(x) \tag{8}$$

является интегрируемым в квадратурах. Так как полная интегрируемость динамической системы эквивалентна [11] (по теореме Лиувилля) интегрируемости этой системы с помощью квадратур, т. е. с помощью сведения решения системы к выражениям, где использованы только элементарные и алгебраические функции и интегралы от них, то отсюда получаем указанное выше следствие. Исследуем указанную выше проблему описания класса $\mathcal{R}$ функций $f(x)$, обеспечивающих полную интегрируемость уравнения Риккати (8), методами, предложенными в работе [18]. При этом покажем связь рассматриваемых уравнений Риккати с проблемами алгебраической геометрии, в частности с абелевыми многообразиями гиперэллиптических римановых поверхностей, дающих эффективные средства для решения проблемы Лиувилля в классе почти периодических функций.

Представление Лакса и полная интегрируемость уравнений Риккати. Пусть задано уравнение Риккати (8) с произвольной достаточно гладкой функцией $f(x)$. Предварительно рассмотрим задачу Коши для этого уравнения с какой-то фиксированной функцией $f(x)$. При этом принадлежности функции $f(x)$ классу $\mathcal{R}$ не предполагается. Имеем

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + f(x), \quad y(x_0) = y_0, \tag{9}$$

где y_0 — произвольные данные Коши в точке x_0. Тогда существует единственное дифференцируемое по переменным x_0 и y_0 решение уравнения (9), удовлетворяющее условиям

$$\left.\frac{\partial y}{\partial x_0}\right|_{x=x_0} = -y_0^2 - f(x_0), \quad \left.\frac{\partial y}{\partial y_0}\right|_{x=x_0} = 1. \tag{10}$$

Рассмотрим уравнения в частных производных на функцию $y = y(x, x_0, y_0)$ в виде

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} = 2y \frac{\partial y}{\partial t}, \quad t = x_0, \quad y_0. \tag{11}$$

Следующая лемма очевидна.

Лемма 1. Все решения уравнений (11) с условиями (10), которые сводятся к квадратурам, являются также решениями уравнения (9), сводимыми к квадратурам.

Пусть $y = y(x, x_0, y_0)$ — решение уравнений (11), которое при некоторых x_0' и y_0' является почти периодической функцией по переменной x. Тогда справедлива такая теорема.

Теорема 3. При указанном выше условии почти периодичность по x решения $y(x, x_0, y_0)$ сохраняется при всех x_0 и y_0.

Доказательство этого утверждения опирается на следующий факт, установленный в работе [18].

Лемма 2. Для уравнения (11) существует представление Лакса

$$[X_\lambda, T_\lambda] = 0, \tag{12}$$

где

$$X_\lambda = \frac{\partial}{\partial x} - i\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - y \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{13}$$

$$T_\lambda = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{i}{2\lambda} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial t}$$

— линейные дифференциальные операторы в пространстве комплексных дифференцируемых вектор-функций; λ — произвольный комплексный параметр.

Запись (12) означает, что коммутатор операторов (13) на решениях уравнений (11) тождественно равен нулю (см. [15]). Представление Лакса (12) дает возможность находить решения уравнений (11) с помощью модификации методов работ [5, 6, 9, 16], развитых для нелинейных уравнений типа Кортевега-де Фриза, а также методов работ [2—4, 10, 18, 21, 22], развитых для различных нелинейных дифференциальных и дифференциально-разностных эволюционных уравнений, обладающих представлением Лакса на матричных дифференциальных операторах первого порядка, рационально зависящих от произвольного спектрального параметра λ. При этом задача сводится к проблеме Якоби обращения абелевых интегралов на гиперэллиптических римановых поверхностях, для решения которой использованы многомерные тэта-функции Римана.

Рассмотрим следующие совместные линейные дифференциальные уравнения на вектор-функцию $g_\lambda = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$:

$$X_\lambda g_\lambda(x, t) = 0, \quad T_\lambda g_\lambda(x, t) = 0. \tag{14}$$

Отсюда прямым вычислением на функции $h = g_1 g_2$, $\varphi = g_1^2$ и $\psi = g_2^2$ получим уравнения

$$\frac{\partial h}{\partial x} = y(\varphi + \psi), \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -2i\lambda\psi + 2yh, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{i}{\lambda} \frac{\partial y}{\partial t}(h - \varphi),$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2i\lambda\varphi + 2yh, \quad \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{i}{2\lambda} \frac{\partial y}{\partial t}(\psi - \varphi), \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{i}{\lambda} \frac{\partial y}{\partial t}(\psi - h). \tag{15}$$

Наряду с системой (15) рассмотрим ассоциированную систему дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial h}{\partial x} = a\psi + b\varphi, \quad \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{i}{2\lambda}\left[\frac{\partial a}{\partial t}\psi - \frac{\partial b}{\partial t}\varphi + \left(\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial w}{\partial t}\right)h\right],$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2i\lambda\varphi + 2ah, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{i}{\lambda}\left(\frac{\partial a}{\partial t}h - \frac{\partial v}{\partial t}\varphi\right),$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -2i\lambda\psi + 2bh, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{i}{\lambda}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\psi - \frac{\partial b}{\partial t}h\right), \tag{16}$$

где $a = a(x, t)$, $b = b(x, t)$, $v = v(x, t)$, $w = w(x, t)$ — произвольные функции, которые впоследствии свяжем с функцией $y = y(x, t)$. Систему уравнений (16) характеризует следующая лемма.

Лемма 3. Система дифференциальных уравнений (16) допускает полиномиальное по параметру λ решение

$$h = \sum_{k=0}^{N+1} h_k(x, t)\lambda^k, \quad \varphi = \sum_{k=0}^{N} \varphi_k(x, t)\lambda^k, \quad \psi = \sum_{k=0}^{N} \psi_k(x, t)\lambda^k \tag{17}$$

тогда и только тогда, когда коэффициенты h_k, φ_k и ψ_k удовлетворяют некоторым системам нелинейных дифференциальных уравнений и выполнены следующие соотношения:

$$a(x, t) = -\frac{i\varphi_N}{h_{N+1}}, \quad b(x, t) = \frac{i\psi_N}{h_{N+1}}, \tag{18}$$

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial a(x, t)}{\partial t}\frac{h_0}{\varphi_0}, \quad \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial b(x, t)}{\partial t}\frac{h_0}{\psi_0},$$

$$\frac{\partial a(x, t)}{\partial t}\psi_0 - \frac{\partial b(x, t)}{\partial t}\varphi_0 = \left[\frac{\partial w(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial v(x, t)}{\partial t}\right]h_0,$$

причем на подмногообразии M пространства $\mathbb{C}^{N+2} \times \mathbb{C}^{N+1} \times \mathbb{C}^{N+1}$ переменных (h_k, φ_k, ψ_k), определяемом дифференциальными уравнениями

$$\frac{\partial^2\varphi_N}{\partial x\partial t} = \frac{2ih_0\varphi_N}{h_{N+1}\psi_0}\frac{\partial\psi_N}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2\psi_N}{\partial x\partial t} = \frac{-2ih_0\psi_N}{h_{N+1}\varphi_0}\frac{\partial\varphi_N}{\partial t},$$

$$\frac{\partial h_{N+1}}{\partial x} = \frac{\partial h_{N+1}}{\partial t} = \frac{\partial h_N}{\partial x} = \frac{\partial h_N}{\partial t} = 0, \tag{19}$$

$$h_{N+1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h_0}{\varphi_0}\frac{\partial\varphi_N}{\partial t}\right) = i\frac{\partial}{\partial t}(\varphi_N\psi_N),$$

$$h_{N+1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h_0}{\psi_0}\frac{\partial\psi_N}{\partial t}\right) = -i\frac{\partial}{\partial t}(\varphi_N\psi_N),$$

эти системы уравнений являются автономными и совместными.

Доказательство леммы проводится прямой подстановкой выражений (17) в уравнения (16) с учетом произвольности параметра λ и дальнейшей проверкой условия совместности Фробениуса. По отношению к нашей основной задаче описания класса $\mathcal{R}$ функций $f(x)$ сформулируем теорему, являющуюся следствием леммы 3.

Теорема 4. Пусть на подмногообразии M выделена гладкая кривая $\mathcal{L}$ с помощью условий

$$\left.\frac{\partial\varphi_N}{\partial x_0}\right|_{x=x_0} = -\left.\frac{\partial\psi_N}{\partial x_0}\right|_{x=x_0} = -ih_{N+1}(y_0^2 + f(x_0)),$$

$$\left.\frac{\partial\varphi_N}{\partial y_0}\right|_{x=x_0} = -\left.\frac{\partial\psi_N}{\partial y_0}\right|_{x=x_0} = ih_{N+1},$$

$$h_0(x_0, t) = \varphi_0(x_0, t) = \psi_0(x_0, t),$$

$$\varphi_N(x_0, t) = -\psi_N(x_0, t) = ih_{N+1}y_0, \tag{20}$$

$$h(x', t', \lambda^*) = h^*(x', t', \lambda), \; \varphi(x', t', \lambda^*) = \psi^*(x', t', \lambda),$$

$$\varphi_N(x', t') = -\varphi_N^*(x', t'), \; h_0(x', t') = \varphi_0(x', t') = \psi_0(x', t'),$$

где x', t' $(t' = (x_0', y_0'))$ — произвольная точка в $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^2$, задающая начало кривой $\mathcal{L}$ на M. Тогда для всех x, t справедливы равенства

$$a(x, t) = b(x, t) = y(x, t),$$

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial y(x, t)}{\partial t}, \tag{21}$$

причем функция $y(x, t)$ является действительной и удовлетворяющей дифференциальному уравнению Риккати (9) с функцией $f(x)$, входящей в условия (20).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим кривую $\mathscr{L}$ на подмногообразии M, выделяемую условиями (20). В переменных $a(x, t)$, $b(x, t)$, $v(x, t)$ и $w(x, t)$ эта кривая задается уравнениями

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(ab), \tag{22}$$

$$\frac{\partial^2 a}{\partial x \partial t} = 2a\frac{\partial w}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 b}{\partial x \partial t} = 2b\frac{\partial v}{\partial t} \tag{23}$$

с начальными условиями вида

$$\begin{gathered}
\left.\frac{\partial a}{\partial x_0}\right|_{x=x_0} = \left.\frac{\partial b}{\partial x_0}\right|_{x=x_0} = -y_0^2 - f(x_0), \\
\left.\frac{\partial a}{\partial y_0}\right|_{x=x_0} = \left.\frac{\partial b}{\partial y_0}\right|_{x=x_0} = 1, \quad a(x_0, t) = b(x_0, t) = y_0,
\end{gathered} \tag{24}$$

$$\begin{gathered}
\left.\frac{\partial v}{\partial x_0}\right|_{x=x_0} = \left.\frac{\partial w}{\partial x_0}\right|_{x=x_0} = -y_0^2 - f(x_0), \\
\left.\frac{\partial v}{\partial y_0}\right|_{x=x_0} = \left.\frac{\partial w}{\partial y_0}\right|_{x=x_0} = 1, \quad v(x_0, t) = w(x_0, t) = y_0.
\end{gathered} \tag{25}$$

Проинтегрировав уравнения (22) по переменной t, найдем

$$\frac{\partial v}{\partial x} = ab + f_v(x), \quad \frac{\partial w}{\partial x} = ab + f_w(x), \tag{26}$$

где функции $f_v(x)$ и $f_w(x)$ не зависят от переменной t. В силу начальных условий (24), (25) находим

$$f_v(x) = f_w(x) = f(x), \quad v(x, t) = w(x, t) = \tilde{y}(x, t), \tag{27}$$

т. е. уравнения (26) можно записать одним уравнением

$$\frac{d\tilde{y}}{dx} = ab + f(x), \quad \tilde{y}(x_0) = y_0. \tag{28}$$

Рассмотрим уравнения (23) с учетом равенств (27):

$$\frac{\partial^2 a}{\partial x \partial t} = 2a\frac{\partial \tilde{y}}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 b}{\partial x \partial t} = 2b\frac{\partial \tilde{y}}{\partial t} \tag{29}$$

и покажем, что $a(x, t) = b(x, t) = \tilde{y}(x, t) = y(x, t)$. Положим $a(x, t) - b(x, t) = \xi(x, t)$. Тогда из уравнений (24), (29) находим уравнение на функцию ξ в виде

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial t} = 2\xi\frac{\partial \tilde{y}}{\partial t}, \quad \xi(x_0, t) = \left.\frac{\partial \xi}{\partial t}\right|_{x=x_0} = 0. \tag{30}$$

В силу начальных условий уравнение (30) эквивалентно интегральным уравнениям

$$\begin{gathered}
\xi(x, x_0, y_0) = 2\int_x^{x_0} d\eta \int_\eta^x \frac{\partial \tilde{y}(\tau, \eta, y_0)}{\partial \eta}\,\xi(\tau, \eta, y_0)\,d\tau, \\
\frac{\partial \xi(x, x_0, y_0)}{\partial y_0} = 2\int_{x_0}^x \frac{\partial \tilde{y}(\tau, x_0, y_0)}{\partial y_0}\,\xi(\tau, x_0, y_0)\,d\tau.
\end{gathered} \tag{31}$$

Пользуясь методом последовательных приближений, легко показать, что первое интегральное уравнение (31) имеет единственное тривиальное решение $\xi(x, x_0, y_0) = 0$, которое, очевидно, совместимо со вторым интегральным уравнением. Итак, нами показано, что $a(x, t) = b(x, t) = y$. Чтобы доказать равенство $\tilde{y}(x, t) = y(x, t)$, рассмотрим уравнения (22), (23) в следующей форме:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} = 2y\frac{\partial \tilde{y}}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial x \partial t} = 2y\frac{\partial y}{\partial t}$$

$$y(x_0, t) = \tilde{y}(x_0, t) = y_0, \quad \frac{\partial y}{\partial y_0}\bigg|_{x=x_0} = \frac{\partial \tilde{y}}{\partial y_0}\bigg|_{x=x_0} = 1, \tag{32}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_0}\bigg|_{x=x_0} = \frac{\partial \tilde{y}}{\partial x_0}\bigg|_{x=x_0} = -y_0^2 - f(x_0).$$

Как и для системы (29), построим разность $\tilde{y}(x, t) - y(x, t) = \tilde{\xi}(x, t)$, удовлетворяющую согласно выражениям (32) уравнению

$$\frac{\partial^2 \tilde{\xi}}{\partial x \partial t} = -2y\frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial t}, \quad \tilde{\xi}(x_0, t) = \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial t}\bigg|_{x=x_0} = 0.$$

Это уравнение линейно относительно $\frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial t}$, поэтому в силу начальных условий получаем, что $\tilde{\xi}(x, t) = 0$. Этим доказано, что $\tilde{y}(x, t) = y(x, t)$, и система уравнений (22), (23) сводится к одному уравнению (9), причем действительность функции $y(x, t)$ следует из характера выбранных начальных условий (20) и теоремы единственности Коши. Итак, утверждение теоремы полностью доказано.

Доказанная теорема имеет серьезный недостаток, так как не дает эффективного критерия для описания подмногообразия M, кривые $\mathcal{L}$ которого являются носителями функций $f(x) \in \mathcal{R}$, обеспечивающих интегрируемость уравнения Риккати (9) с помощью квадратур. Поэтому подмногообразие M следует описать на языке задач алгебраической геометрии, предварительно сведя проблему описания класса функций $\mathcal{R}$ к проблеме Якоби обращения абелевых интегралов на гиперэллиптических римановых поверхностях.

1. *Ахиезер Н. И.* Континуальный аналог ортогональных многочленов на системах интервалов.— Докл. АН СССР, 1961, **141**, № 2, с. 263—266.
2. *Боголюбов Н. Н., мл., Прикарпатский А. К.* Обратная периодическая задача для дискретного приближения нелинейного уравнения Шредингера. — Докл. АН СССР, 1982, **262**, № 5, с. 1103—1108.
3. *Боголюбов Н. Н., мл., Прикарпатский А. К., Самойленко В. Г.* Обратная периодическая задача для дискретного приближения модифицированного нелинейного уравнения Кортевега-де Фриза.— Докл. АН СССР, 1981, **258**, № 3, с. 575—580.
4. *Голод П. И., Прикарпатский А. К.* Периодическая задача для классической двумерной модели Тирринга.— Укр. мат. журн., 1979, **31**, № 4, с. 454—459.
5. *Дубровин Б. А.* Обратная периодическая задача рассеяния для конечно-зонных периодических потенциалов.— Функц. анализ, 1975, **9**, вып. 1, с. 65—66.
6. *Дубровин Б. А., Матвеев В. Б., Новиков С. П.* Нелинейные уравнения Кортевега-де Фриза, конечно-зонные линейные операторы и абелевы многообразия.— Успехи мат. наук, 31, вып. 1, с. 35—136.
7. *Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П.* Теория солитонов.— М. : Наука, 1980.— 319 с.
8. *Зверович Э. И.* Краевые задачи теории аналитических функций в гельдеровских классах на римановых поверхностях.— Успехи мат. наук, 1971, **26**, вып. 1, с. 113—179.
9. *Итс А. Р., Матвеев В. Б.* Операторы Хилла с конечно-зонным спектром и многосолитонные решения уравнения Кортевега-де Фриза.— Теорет. и мат. физика, 1975, 23, № 1, с. 51—67.
10. *Итс А. Р., Котляров В. П.* Явные формулы для решений нелинейного уравнения Шредингера.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1976, № 11, с. 965—968.
11. *Капланский И.* Введение в дифференциальную алгебру.— М. : Изд-во иностр. лит., 1950.— 67 с.
12. *Кричевер И. М.* Методы алгебраической геометрии в теории нелинейных уравнений.— Успехи мат. наук, 1977, 32, вып. 6, с. 183—208.
13. *Кричевер И. М.* Алгебро-геометрическое построение решений нелинейных дифференциально-разностных уравнений.— Успехи мат. наук, 1978, 33, вып. 4, с. 271.
14. *Козел В. А., Котляров В. П.* Конечно-зонные решения уравнения синус-Гордон.— Сб. науч. тр. ФТИНТ АН УССР, 1978, вып. 3, с. 89—103.
15. *Лакс П. Д.* Интегралы нелинейных уравнений эволюции и уединенные волны.— Математика, 1969, 13, № 6, с. 128—150.
16. *Марченко В. А.* Периодическая задача Кортевега-де Фриза.— Мат. сб., 1974, **97**, № 4, с. 540—606.
17. *Новиков С. П.* Периодическая задача Кортевега-де Фриза.— Функ. анализ, 1974, **8**, вып. 3, с. 54—66.
18. *Прикарпатский А. К.* Об уравнениях Риккати, интегрируемых в квадратурах.— Докл. АН СССР, 1980, **251**, № 5, с. 1072—1077.

19. *Спрингер Дж.* Введение в теорию римановых поверхностей.— М. : Изд-во иностр. лит., 1960.— 343 с.
20. *Титчмарш Э. И.* Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными операторами второго порядка.— М. : Изд-во иностр. лит., 1961.— Т. 2. 420 с.
21. *Date E.* On quasi-multisolitons of the field equations of the classical Massiv Thirring Model.— Progr. Theor. Phys., 1978, **59**, p. 265—273.
22. *Date E., Tanaka S.* Periodic multisolitons solutions of the Korteweg-de Vries equation and Toda lattice.— Prog. Theor. Phys. Suppl., 1976, **59**, p. 107—125.
23. *Gardner C., Green J., Kruskal M., Miura R.* A method for solving the Korteweg-de Vries equation.— Phys. Rev., Lett., 1967, **15**, p. 240—243.

Математический институт
им. В. А. Стеклова АН СССР
Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
09.04.81

УДК 517.946

В. В. Фиголь

ЗАДАЧА ТИПА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В настоящей работе, являющейся развитием работ [3, 6], изучена задача типа Дирихле для гиперболического по Гордингу уравнения $2n$-го порядка с постоянными действительными коэффициентами в области $D = [0, T] \times \Omega_m$, где Ω_m — m-мерный тор, полученный отождествлением противоположных граней параллелепипеда $\{x \mid 0 \leqslant x_j \leqslant 2\pi,\ j = \overline{1, m}\}$, и установлены условия существования, единственности и корректности решения задачи.

Рассмотрим в области D задачу

$$\sum_{|l|\leqslant 2n} a_l \frac{\partial^{|l|} u(t, x)}{\partial t^{2l_0} \partial x_1^{l_1} \ldots \partial x_m^{l_m}} = f(t, x), \tag{1}$$

$$\sum_{\substack{|s|\leqslant N \\ s_0 \leqslant n-1}} b_s^{(j)} \frac{\partial^{|s|} u(t, x)}{\partial t^{2s_0} \partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_m^{s_m}} \Bigg|_{\substack{t=0 \\ t=T}} = 0 \, (j = \overline{1, n}), \tag{2}$$

где $a_{n,0,\ldots,0} = 1$; a_l, $b_s^{(j)} \in \mathbb{R}$; $l = (l_0, l_1, \ldots, l_m)$, $s = (s_0, s_1, \ldots, s_m)$, $|l| = 2l_0 + l_1 + \ldots + l_m$. Вид области D налагает условия 2π-периодичности по x на функции $u(t, x)$ и $f(t, x)$.

Предположим, что при любом фиксированном $s_0 = \overline{0, n-1}$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{|s'|\leqslant N-2s_0} [b_{s_0,s'}^{(j)}]^2 \neq 0. \tag{3}$$

Уравнение (1) гиперболическое по Гордингу, т. е. $\forall\, \xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ корни $\lambda(\xi)$ уравнения

$$\sum_{|l|\leqslant 2n} a_l \lambda^{2l_0} (i\xi_1)^{l_1} \ldots (i\xi_m)^{l_m} = 0 \tag{4}$$

удовлетворяют условию

$$\operatorname{Re} \lambda_j(\xi) < C \quad (j = \overline{1, 2n}). \tag{5}$$

В дальнейшем используем такие обозначения: $k = (k_1, \ldots, k_m)$, $|k| = |k_1| + \ldots + |k_m|$; $(k, x) = k_1x_1 + \ldots + k_mx_m$; $s' = (s_1, \ldots, s_m)$; H_q ($q = 0, 1, 2, \ldots$) — гильбертово пространство 2π-периодических по всем переменным функций $v(x) = \sum_k v_k \exp\{i(k, x)\}$ со скалярным произведением, индуцирующим норму [1]:

$$\|v(x)\|_{H_q}^2 = (2\pi)^m \sum_{|k|\geqslant 0} [1 + \|k\|^2]^q |v_k|^2; \tag{6}$$

H_q^p ($q \geqslant p$) — гильбертово пространство функций $u(t, x)$ таких, что $\forall\, t \in$