

Рис. 2.

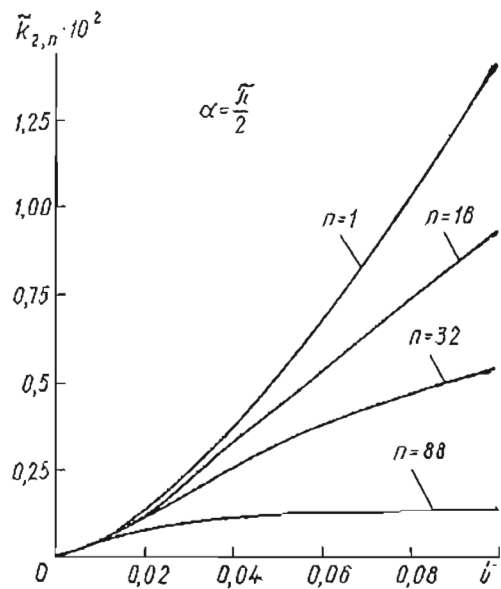


Рис. 3.

от безразмерной длины трещины $\delta = \frac{L}{R}$. Как показывает анализ соотношения (13) и приведенных графиков, величина коэффициентов интенсивности напряжений существенно зависит от количества трещин и их длины. При увеличении n коэффициенты интенсивности напряжений снижаются, и как это следует из формул (13), стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$. При небольшом количестве трещин ($n \leq 4$) графики $\tilde{k}_{i,1} \div \tilde{k}_{i,4}$ ($i = 1, 2$) практически совпадают, так как в случае трещин малой длины возмущение температурного поля в окрестности одной трещины слабо влияет на возмущение температурного поля в окрестности другой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гайвась И. В.— Прикладная механика, 1966, 2, 2.
2. Каминский А. А.— Прикладная механика, 1971, 7, 12.
3. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. «Наука», М., 1966.
4. Панасюк В. В., Бережницкий Л. Т.— ФХММ, 1965, 1, 4.
5. Прусов И. А. Некоторые задачи термоупругости. Изд-во Белорусского ун-та, Минск, 1972.
6. Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий. «Наукова думка», К., 1968.
7. Bowie O. L.— J. Math. and Phys., 1956, 45, 1.

Львовский филиал математической физики Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию в декабре 1973 г.

ТЕРМОУПРУГОЕ СОСТОЯНИЕ ПЛОСКОСТИ С КРУГОВОЙ ЛУНОЧКОЙ

Г. С. Махар

Рассмотрим упругую плоскость, ослабленную теплоизолированной полостью, имеющую форму луночки, образованной пересечением дуг двух окружностей разных радиусов. Пусть на бесконечности задано температурное поле

$$t_{\infty} = q(x \cos \varphi + y \sin \varphi),$$

обусловленное однородным тепловым потоком плотности q , направленным под углом φ к оси Ox . Определим возмущение температурного поля в окрест-

ности полости, а также напряженно-деформированное состояние данной плоскости.

Решение задачи будем искать в биполярной системе координат (α, β) , т. е.

$$x = \frac{\operatorname{sh} \alpha}{g}; \quad y = \frac{\sin \beta}{g}; \quad g = \frac{1}{a} (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta).$$

Пусть луночка образована пересечением дуг двух окружностей разных радиусов

$$\beta = (-1)^{i+1} \gamma_i; \quad i = 1, 2.$$

Решая уравнение теплопроводности $\frac{\partial^2 T}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \beta^2} = 0$ при условии теплоизоляции контура, получаем

$$T(\alpha, \beta) = aqr \{ (\Pi_1 + \Pi_2) \operatorname{sh} p\alpha \cos \varphi + [\Pi_1 \sin p\beta + \Pi_2 \sin p(\beta - \bar{\gamma})] \sin \varphi \}.$$

При этом

$$\Pi_1 = 1/(\operatorname{ch} p\alpha - \cos p\beta); \quad \Pi_2 = 1/[\operatorname{ch} p\alpha + \cos p(\beta - \bar{\gamma})];$$

$$p = \pi/\gamma; \quad \gamma = \gamma_1 + \gamma_2; \quad \bar{\gamma} = \gamma_1 - \gamma_2.$$

Для симметричной луночки ($\gamma_2 = \gamma_1$) имеем

$$T(\alpha, \beta) = 4aqr \operatorname{ch} \omega\alpha \frac{\operatorname{sh} \omega\alpha \cos \varphi + \sin \omega\beta \sin \varphi}{\operatorname{ch} 2\omega\alpha - \cos 2\omega\beta}.$$

Здесь и в дальнейшем $\omega = \frac{\pi}{2\gamma_1}$.

Поле напряжений находим, используя аналогию между температурными и дислокационными напряжениями. Для этого найдем функцию комплексного переменного $F(z)$, для которой $\operatorname{Re} F(z) = T(\alpha, \beta)$.

В нашем случае

$$F(z) = - \frac{2aqr \{ \omega^p (e^{i p \bar{\gamma}} + 1) \sin \varphi - i (\omega^{2p} + e^{i p \bar{\gamma}}) \cos \varphi \}}{(\omega^p - 1)(\omega^p + e^{i p \bar{\gamma}})},$$

где $\omega = (z + a)/(z - a)$.

Для симметричной луночки

$$F(z) = - 2aqr \frac{(\omega^{2\omega} + 1) \cos \varphi - i 2\omega^\omega \sin \varphi}{\omega^{2\omega} - 1}.$$

Используя аналогию между температурными и дислокационными напряжениями [1, 2], находим напряженно-деформированное состояние. Проиллюстрируем это на примере. Пусть луночка имеет форму окружности. Тогда $\gamma_1 = \pi/2$. По аналогии с [2] характеристики дислокаций имеют вид

$$e_1 = 0; \quad \alpha_1^0 = - \frac{a^2 \nu q \pi \sin \varphi}{\lambda + \mu}; \quad \beta_1^0 = \frac{a^2 \nu q \pi \cos \varphi}{\lambda + \mu}. \quad (1)$$

Здесь $\nu = (3\lambda + 2\mu)\alpha_t$; α_t — линейный коэффициент температурного расширения; λ, μ — постоянные Ляме.

Для определения напряженного состояния введем функцию напряжений

$$U(\alpha, \beta) = U_{(\alpha, \beta)}^{(0)} + U_{(\alpha, \beta)}^{(\partial)}. \quad (2)$$

Бигармоническую функцию $gU_{\alpha, \beta}^{(0)}$ выбираем в виде [3]

$$gU_{(\alpha, \beta)}^{(0)} = \int_0^\infty [B(m) \operatorname{ch} m\beta \sin \beta + C(m) \operatorname{sh} m\beta \cos \beta] \cos m\alpha dm + \\ + \int_0^\infty [A(m) \operatorname{ch} m\beta \cos \beta + D(m) \operatorname{sh} m\beta \sin \beta] \sin m\alpha dm.$$

Учитывая формулы (1), имеем

$$gU_{(\alpha, \beta)}^{(\partial)} = b (\alpha_1^0 \sin \beta - \beta_1^0 \operatorname{sh} \alpha) \ln (agf),$$

где $b = \frac{\mu}{\pi(1+\kappa)}$; $\kappa = \frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}$; $f = \frac{1}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta}$.

Напряжения в плоскости находим по формулам

$$\begin{aligned} a\sigma_{\alpha\alpha} &= \left(ag \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - \operatorname{sh} \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} - \sin \beta \frac{\partial}{\partial \beta} + \operatorname{ch} \alpha \right) (gU); \\ a\sigma_{\beta\beta} &= \left(ag \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \operatorname{sh} \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} - \sin \beta \frac{\partial}{\partial \beta} + \cos \beta \right) (gU); \\ a\sigma_{\alpha\beta} &= -ag \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} (gU). \end{aligned} \quad (3)$$

При отсутствии на контуре внешних силовых воздействий

$$\sigma_{\beta\beta} = \sigma_{\alpha\beta} = 0 \quad \text{при } \beta = \pm \pi/2$$

с учетом формул (3) находим функцию напряжений (2):

$$gU = b(\alpha_1^0 \sin \beta - \beta_1^0 \operatorname{sh} \alpha) [\ln(agf) + 2f \cos \beta].$$

Наибольший интерес представляют напряжения $\sigma_{\alpha\alpha}$, которые в нашем случае имеют вид

$$\begin{aligned} a^2\sigma_{\alpha\alpha} &= \alpha_1^0 Q \operatorname{ch} \alpha \sin \beta [\operatorname{ch} \alpha \cos \beta (\operatorname{sh}^2 \alpha - \sin^2 \beta) - \\ &\quad - 2 \operatorname{ch}^2 \alpha - (2 \operatorname{sh}^2 \alpha + 3 \operatorname{ch}^2 \alpha) \cos^2 \beta - \cos^4 \beta] + \\ &\quad + 2\beta_1^0 Q \operatorname{sh} \alpha (\operatorname{sh}^2 \alpha \cos^3 \beta + 2 \operatorname{ch} \alpha \sin^2 \beta \cos^2 \beta + \operatorname{ch}^3 \alpha \sin^2 \beta). \end{aligned}$$

Здесь $Q = 2bf^3/g$.

Последнее решение совпадает с решением для плоскости с одним отверстием [4, 2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. «Наука», М., 1966.
2. Подстригач Я. С., Макарыч Г. С. — Прикладная механика, 1971, 7, 4.
3. Уфлянд Я. С. Биполярные координаты в теории упругости. ГИТТЛ, М.—Л., 1950.
4. Flogeuse A. L., Goodier J. N. — J. Appl. Mech., 1959, 26, 2.

Львовский филиал математической
физики Института математики
АН УССР

Поступила в редколлегию
в ноябре 1973 г.