НАБЛИЖЕНИЙ СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ СИСТЕМАМИ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІТО-СКОРОХОДА З МАЛИМ ПАРАМЕТРОМ

©2008 р. Тарас ЛУКАШІВ

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,
вул. Коцюбинського, 2, Чернівці, 58012

Редакція отримала статтю 5 жовтня 2008 р.

Одержано алгоритм побудови синтезу оптимального керування для стохастичних динамічних систем зі скінченною післядією, що містять малий параметр. Доведено, що шукане керування такими системами може бути оптимальним для деякої допоміжної задачі. Побудовано алгоритм послідовного наближення ітерацій до наближеного керування.

1 Вступ

В монографії [1] наведено метод побудови наближеного синтезу оптимального керування для систем з неперервними вінеровими збуреннями скінченної післядії, що містить малий параметр.

Автори монографії [1] довели, що шукане керування для таких систем може бути оптимальним для деякої допоміжної задачі керування, побудували алгоритм послідовних наближень до оптимального керування.

Автори монографії [4] вирішили проблему наближеного синтезу оптимального керування системами стохастичних диференціально-функціональних рівнянь Іто-Скорохода зі всією передісторією.

УДК 519.217, 519.718

В даній роботі розв'язано задачу побудови наближеного синтезу оптимального керування для стохастичних систем, що описуються стохастичними диференціально-функціональними рівняннями скінченної післядії і випадковими збуреннями як вінерового, так і пуассонового типів, що містять малий параметр. Побудовано алгоритм послідовних наближень керувань до оптимального.

2 Постановка задачі

Розглянемо задачу оптимального керування $\{x^u(t,\omega), J(u), U\}$ з керовним випадковим процесом $x^u(t,\omega)$, який підпорядкований потоку σ - алгебр $\Im_t$ з функціоналом якості $J(u)$ і множиною допустимих керувань U [1].

Означення 1. Функції $u(t)$, що є $\Im_t$ - вимірними, для яких визначена траєкторія руху $x(t,\omega)$ і скінченний функціонал $J(u)$, назвемо допустимим керуванням.

Позначимо

$$v_J \equiv \inf_{u\in U} J(u). \tag{1}$$

Розглянемо наступну задачу: знайти таке керування $u(t) \in U$, для якого функціонал якості $J(u)$ приймає мінімальне значення, тобто

$$J(u^0) = v_J. \tag{2}$$

Означення 2. Керування $u^0(t)$,для якого виконується (2) назвемо оптимальним керуванням задачі $\{x^u(t,\omega), J(u), U\}$.

Якщо оптимальне керування $u^0(t)$ з U не існує або існує, але одержати його складно, то виникає питання про побудову керування $\tilde{u}^0(t) \in U$ із заданою точністю.

Нехай, наприклад, задача керування $\{x^u(t,\omega), J(u), U\}$ містить малий параметр ε і задано точність керування $\tau(\varepsilon) > 0$. Тоді $\tilde{u}^0(t)$ задовольняє нерівність

$$0 \le \left|J(\tilde{u}^0) - v_J\right| \le \tau(\varepsilon). \tag{3}$$

Означення 3. Керування $\tilde{u}^0$, яке задовольняє (3), назвемо $\tau(\varepsilon)$ - оптимальним керуванням задачі $\{x^u(t,\omega), J(u), U\}$.

3 Алгоритм побудови послідовних наближень оптимального керування стохастичної динамічної системи скінченної післядії Іто-Скорохода з малим параметром

Нехай на ймовірнісному просторі $(\Omega, \Im, P)$ з потоком σ - алгебр $\{\Im_t, t \geq 0\}$, $\Im_t \subseteq \Im$, задана задача керування для стохастичної системи

$$\begin{aligned} dx^u(t) = a(t, x_t^u, u, \varepsilon)dt + b(t, x_t^u, u, \varepsilon)dw(t) + \\ + \int_Z c(t, x_t^u, z, u, \varepsilon)\tilde{\nu}(dz, dt), \quad \forall t \geq 0, \end{aligned} \tag{4}$$

за початковою умовою

$$x^u(t) = \varphi(t), \ -h \leq t \leq 0, \ \varphi \in D. \tag{5}$$

Тут $x^u(t) \equiv x^u(t, \omega) \in R^n$ - сильний розв'язок задачі (1), (2); відрізки траєкторії-розв'язку $x_t^u(t) \equiv \{x^u(t+\theta), \ -h \leq \theta \leq 0\}$ - належать простору Скорохода D неперервних справа функцій, які мають лівосторонні границі [2]; $a : [0,T] \times D \times U \to R^n$; $b : [0,T] \times D \times U \to M_n(R^n)$ - матриця $n \times n$; $c : [0,T] \times D \times Z \times U \to R^n$; $w(t) \ - \ n$ -вимірний стандартний вінерів процес; $\tilde{\nu}(dz, dt) \equiv \equiv \nu(dz, dt) - \Pi(dz)dt$ - центрована пуассонова міра, яка не залежить від $w(t)$ [2]; $E\{\nu(dz, dt)\} = \Pi(dz)dt$; $u \in U$ - l -вимірний простір кусково-неперервних керувань; ε - малий параметр; $E\{\cdot\}$ - математичне сподівання.

Розглянемо допоміжну задачу керування для $\{x^u(t), J(u), U\}$ і позначимо її через $\{y^u(t), I(u), U\}$ на потоці $\{\Im_t\}$, $t \in [0,T]$. Функціонал якості $J(u) \equiv J^u(0, \varphi(0))$, де

$$J^u(t, \varphi) = E_{t,\varphi} \left\{ F(x_T^u, \varepsilon) + \int_t^T G(s, x_s^u, u(s, x_s^u), \varepsilon) ds \right\}, \tag{6}$$

а $F(\varphi, \varepsilon) \geq 0$; $G(t, \varphi, u) \geq 0$.

Нехай

$$v_I \equiv \inf_{u \in U} I(u). \tag{7}$$

Якщо позначити через $\tilde{u}^0(t)$ оптимальне керування задачі $\{y^u(t), I(u), U\}$, тобто

$$I(\tilde{u}^0) = v_I, \tag{8}$$

то похибку при цьому позначимо

$$\rho(J, I) \equiv \sup_{u \in U} |J(u) - I(u)| . \tag{9}$$

Лема 1. *За сформульованими вище умовами для задачі керування (4), (5), (6) має місце нерівність*

$$0 \leq \left| J(\tilde{u}^0) - v_J \right| \leq 2\rho(J, I). \tag{10}$$

Доведення. Із означення (9) супремума випливає нерівність

$$|J(u) - I(u)| \leq 2\rho(J, I). \tag{11}$$

Звідки одержимо

$$-\rho(J, I) \leq J(u) - I(u) \leq \rho(J, I),$$

що еквівалентно

$$\begin{aligned} J(u) &\leq I(u) + \rho(J, I), \\ I(u) &\leq J(u) + \rho(J, I). \end{aligned} \tag{12}$$

За означенням v_I і v_J (див. (7)) маємо $v_J \leq v_I + \rho(J, I)$ і $v_I \leq v_J + \rho(J, I)$, тобто $|v_J - v_I| \leq 2\rho(J, I)$, що і доводить твердження.

Теорема 1. *Нехай задача керування $\{x^u(t), J(u), U\}$ містить малий параметр ε , а допоміжна задача керування $\{y^u(t), I(u), U\}$ має оптимальне керування $\tilde{u}^0$ таке, що*

$$\rho(J, I) \leq \tau(\varepsilon), \tag{13}$$

де $\tau(\varepsilon)$ – точність.

Тоді керування $\tilde{u}^0$ є $\tau(\varepsilon)$ - оптимальним керуванням задачі $\{x^u(t), J(u), U\}$.

Доведення. З нерівності (10) і (13) матимемо

$$J(\tilde{u}^0) - v_J \leq 2\rho(J, I) \leq 2\tau(\varepsilon),$$

що і доводить теорему 1.

Теорема 1 дає алгоритм побудови наближеного синтезу оптимального керування для систем (4), (5), що містять в себе малий параметр ε.

Як правило, за допоміжну задачу керування вибираємо вихідну задачу керування (4) - (6), в якій покладемо $\varepsilon = 0$. В результаті одержимо нульове наближення u_0 до оптимального керування u^0 .

Розглянемо алгоритм побудови послідовності допоміжних задач керування, що дозволить одержати наближений синтез із заданою точністю $\tau(\varepsilon)$.

4 Рівняння Беллмана. Оптимальне керування

Оптимальне керування $u^0(t,\varphi)$ і вартість керування $v(t,\varphi)$ задачі (4) - (6) визначається з рівняння Беллмана [1]:

$$\inf_{u\in U}\left[L(t,\varphi,u,\varepsilon)v(t,\varphi)+G(t,\varphi,u,\varepsilon)\right]=0, \tag{14}$$

$$v(T,\varphi)=F(\varphi,\varepsilon), \tag{15}$$

де Lv слабкий інфінітезимальний оператор на розв'язках задачі Коші (4), (5), а саме

$$\begin{gathered}L(t,\varphi,u,\varepsilon)v(t,\varphi)=\tfrac{\partial}{\partial t}v_\varphi(t,x)+(\nabla v(t,x),a(t,\varphi,u,\varepsilon))+\\+\tfrac{1}{2}Sp\left[\nabla^2 v_\varphi(t,x)b(t,\varphi,u,\varepsilon)b'(t,\varphi,u,\varepsilon)\right]+\\+\int\limits_Z\left[v_\varphi(t,x+c(t,\varphi,z,u,\varepsilon))-v(t,x)-(\nabla v_\varphi(t,x),c(t,\varphi,z,u,\varepsilon))\right]\Pi(dz).\end{gathered} \tag{16}$$

Тут через " $'$ " позначено операцію транспонування вектора або матриці; $\nabla v\equiv\left(\frac{\partial v}{\partial x_1},\frac{\partial v}{\partial x_2},...,\ \frac{\partial v}{\partial x_n}\right)'$; $\nabla^2 v\equiv\left\{\frac{\partial^2 v}{\partial x_i\partial x_j}\right\}$, $i,j=\overline{1,n}$; SpA - слід матриці A; $(\cdot,\cdot)$ – скалярний добуток.

Припустимо, що існує така множина V_0 з класу V двічі неперервно-диференційовних по x і один раз по t функціоналів, що для довільного $v\in V_0$ існує в U керування $u^0\in U$, для якого досягається точна нижня границя в лівій частині рівняння (14):

$$\inf_{u\in U}\left[L(t,\varphi,u,\varepsilon)v(t,\varphi)+G(t,\varphi,u,\varepsilon)\right]=L(t,\varphi,u^0,\varepsilon)v(t,\varphi)+G(t,\varphi,u^0,\varepsilon), \tag{17}$$

де $u^0=u^0(t,\varphi,v,\varepsilon)$.

Якщо підставити (17) в (14), то одержимо рівняння для знаходження v :

$$L(t,\varphi,u,\varepsilon)v(t,\varphi)+G(t,\varphi,u,\varepsilon)=0; \tag{18}$$

$$v(T,\varphi)=F(\varphi,\varepsilon). \tag{19}$$

Розв'язок цієї крайової задачі (18), (19) збігається з вартістю задачі керування (4) – (6), а оптимальне керування знаходиться із співвідношення (17).

5 Побудова послідовних наближень до оптимального керування

У рівняннях (18), (19) розкладемо в ряд по ε відповідно величини

$$v(t,\varphi) = v_0(t,\varphi) + \varepsilon v_1(t,\varphi) + \dots, \tag{20_1}$$

$$L(t,\varphi,u^0,\varepsilon) = L_0(t,\varphi) + L_1(t,\varphi) + \dots, \tag{20_2}$$

$$G(t,\varphi,u^0,\varepsilon) = G_0(t,\varphi) + G_1(t,\varphi) + \dots. \tag{20_3}$$

Підставимо (20_1)-(20_3) у (18), (19), прирівняємо до нуля відповідні коефіцієнти при однакових степенях ε , в результаті одержимо

$$\sum_{j=0}^{i} L_{j-1}(t,\varphi)v_j(t,\varphi) + G_i(t,\varphi) = 0; \qquad i = 0,1,2,\dots, \tag{21_1}$$

$$v_0(T,\varphi) = F(\varphi,\varepsilon); \quad v_i(T,\varphi) = 0; \qquad i = 1,2,\dots. \tag{21_2}$$

Оскільки керування u^0 залежить від всіх функціоналів v_j ($j = 0,1,2,...$), то у рівностях (20_1)-(20_3) кожний з операторів $L_i(t,\varphi)$ і функціоналів $G_i(t,\varphi)$ ($i = 0,1,2,...$) взагалі теж можуть залежати від всіх функціоналів v_j ($j = 0,1,2,...$) .

Нехай оператор $L_i(t,\varphi)$ і функціонал $G_i(t,\varphi)$ залежить лише від скінченного числа функціоналів v_j, $j = 0,1,2,...,k$. Функціонал v_0 визначається з рівняння $L_0v_0 + G_0 = 0$, а функціонал v_1 визначимо з (21_1) при $i = 1$:

$$L_0v_1 + L_1v_0 + G_1 = 0;$$

функціонал v_2 визначимо з (21_1) при $i = 2$:

$$L_2v_0 + L_1v_1 + L_0v_2 + G_2 = 0;$$

Функціонал v_k з (21_1) для $i = k$:

$$\sum_{j=0}^{k} L_{j-1}(t,\varphi)v_j(t,\varphi) + G_k(t,\varphi) = 0,$$

тобто, співвідношення (21_1), (21_2) є системою для послідовного знаходження функціоналів $v_o, v_1, \dots, v_k$.

Введемо величину $\delta_k(t,\varphi)$, яка визначається за знайденими $v_0, v_1, ..., v_k$:

$$\begin{gathered}\delta_k(t,\varphi) \equiv \sum_{j=0}^{k} \varepsilon^i \left[\sum_{j=0}^{i} L_{i-j}(t,\varphi) v_j(t,\varphi) + G_i(t,\varphi) \right] - \\ -L(t,\varphi,u_k,\varepsilon) Q_k(t,\varphi) - G(t,\varphi,u_k,\varepsilon),\end{gathered} \tag{22}$$

де

$$u_k \equiv u^0(t,\varphi,Q_k,\varepsilon); \quad Q_k \equiv v_0 + \varepsilon v_1 + ... + \varepsilon^k v_k. \tag{23}$$

З (21_1), (21_2), (22), (23) випливає

$$L(t,\varphi,u_k,\varepsilon) Q_k(t,\varphi) + G(t,\varphi,u_k,\varepsilon) + \delta_k(t,\varphi) = 0, \tag{24}$$

$$Q_k(T,\varphi) = F(\varphi,\varepsilon). \tag{25}$$

Порівнюючи (18), (19) з (24), (25), одержимо: u_k - оптимальне керування, Q_k - функціонал Беллмана допоміжної задачі керування $\{x^u(t), J(u), U\}$, де

$$I_k(u) \equiv J(u) + E_{\varphi_0} \int_o^T \delta_k(s, x_s^k) ds, \tag{26}$$

де E_{φ_0} відповідає $E_{0,\varphi}$, а

$$J(u) = J^u(0,\varphi_0) \geq \inf_{u \in U} J^u(0,\varphi) = v(\varphi_0).$$

Теорема 2. *Якщо $\delta_k(t,\varphi) \equiv o(\varepsilon^{k+1})$, то керування u_k за формулою (24) буде k - им наближенням до оптимального керування $\{x^u(t), J(u), U\}$, тобто*

$$v(\varphi_0) = J(u_k) + o(\varepsilon^{k+1}).$$

Доведення випливає з теореми 1.

6 Алгоритм послідовного наближення до оптимального керування задачі $\{x^u(t), J(u), U\}$

1. З рівнянь (21_1), (21_2) визначаємо функціонали $v_0, v_1, ..., v_k$.

2. За формулами (23) визначаємо керування u_k .

Зауважимо, що при виконанні п.1, п.2 не вимагаємо існування оптимального керування, не вимагаємо існування відповідного рівняння Беллмана.

Теорема 3. *Нехай функціонал*

$$\gamma_k(t,\varphi,u,\varepsilon) = L(t,\varphi,u,\varepsilon)Q_k(t,\varphi) + G(t,\varphi,u,\varepsilon) \tag{27}$$

рівномірно по $t \in [0,T]$, $\forall \varepsilon \leq \varepsilon_0$ *і* $\forall \varphi \in D$ *з множини* $\|\varphi\| \leq K$ *задовольняє умову Ліпшиця*

$$|\gamma_k(t,\varphi,u_1,\varepsilon) - \gamma_k(t,\varphi,u_2,\varepsilon)| \leq K \cdot |u_1 - u_2|\,. \tag{28}$$

Тоді за k-те наближення до оптимального керування u^0 *задачі керування (4)-(6), що задається формулою (23), можна взяти керування таке, для якого*

$$u = u_k + o(\varepsilon^{k+1}). \tag{29}$$

Доведення. Нехай $u_{1k}(t,\varphi)$ - деяке допустиме керування, для якого

$$u_{1k}(t,\varphi) - u_k(t,\varphi) = o(\varepsilon^{k+1}). \tag{30}$$

Значить, для довільного керування виконуються співвідношення

$$\begin{gathered} L(t,\varphi,u_k,\varepsilon)Q_k(t,\varphi) + G(t,\varphi,u_k,\varepsilon) + \delta_k(t,\varphi) + \\ +\gamma_k(t,\varphi,u_k,\varepsilon) - \gamma_k(t,\varphi,u,\varepsilon) = 0. \end{gathered}$$

Покладемо

$$\bar{\delta}_k \equiv \delta_k(t,\varphi) + \gamma_k(t,\varphi,u_k,\varepsilon) - \gamma_k(t,\varphi,u_{1k},\varepsilon). \tag{31}$$

Тоді одержимо

$$L(t,\varphi,u_{1k},\varepsilon)Q_k(t,\varphi) + G(t,\varphi,u_{1k},\varepsilon) + \bar{\delta}_k(t,\varphi) = 0;$$

$$Q_k(T,\varphi) = F(\varphi,\varepsilon).$$

Аналогічно можна довести твердження (24), (25).

Матимемо керування u_{1k} у вигляді (26) із заміною δ_k на $\bar{\delta}_k$.

З умов (28), (30), (31) випливає $\bar{\delta}_k(t,\varphi) \equiv o(\varepsilon^{k+1})$, якщо $\delta_k(t,\varphi) \equiv o(\varepsilon^{k+1})$. Таким чином,

$$0 \leq |J(u_{1k}) - v(\varphi_0)| = o(\varepsilon^{k+1}).$$

Надалі можна обґрунтувати метод послідовних наближень для квазілінійних систем з пуассоновими перемиканнями. Для квазілінійних стохастичних дифузійних рівнянь це здійснено у [1, С. 131-140].

[1] Андреева Е.А., Колмановский В.Б., Шайхет Л.Е. Управление системами с последействием.– М.: Наука, 1992. – 336 с.

[2] Скороход А.В. Асимптотические методы в стохастических дифференциальных уравнениях. – К.: Наукова думка, 1986. – 328 с.

[3] Царьков Е.Ф., Ясинский В.К. Квазилинейные стохастические дифференциально-функциональные уравнения. – Рига: Ориентир, 1992. – 328 с.

[4] Ясинский В.К., Ясинский И.В. Устойчивость и оптимальное управление динамическими системами со всей предысторией. Второе издание, переработанное и дополненное. – К.: Изд-во "ТВіМС", 2004. – 363 с.

APPROXIMATIVE SYNTHESIS OF OPTIMAL CONTROL OF SYSTEMS OF STOCHASTIC DIFFERENTIAL-FUNCTIONAL ITO-SKOROKHOD EQUATIONS WITH A SMALL PARAMETER

Taras LUKASHIV

Yuriy Fed'kovych Chernivtsi National University,
2 Kotsjubynskyi Str., Chernivtsi 58012, Ukraine

We obtain the algorithm of construction of synthesis of the optimal control for stochastic dynamic systems with finite after-action with a small parameter. We prove that this control may be the optimal control for some auxiliary problem. We construct the algorithm of progressive approximation of iterations to the approximate control.