ПРО ГРАНИЧНІ ТОЧКИ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ ЗА ФІЛЬТРОМ

©2008 р. Олександр ЛЕОНОВ

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

Редакція отримала статтю 4 червня 2008 р.

Узагальнено на поняття збіжності за фільтром дві властивості звичайної збіжності: (1) множина граничних точок послідовності дійсних чисел може бути будь-якою замкненою підмножиною $\mathbb{R}$; (2) для кожної граничної точки послідовності дійсних чисел існує збіжна до цієї точки підпослідовність. Охарактеризовано відповідні класи фільтрів для загального випадку і окремо для фільтрів породжених матричними методами підсумовування.

1 Вступ

Мета цієї роботи – узагальнити дві відомі властивості звичайного поняття збіжності про граничні точки послідовності на поняття збіжності за фільтром. Перша властивість говорить, що множина граничних точок послідовності дійсних чисел може бути будь-якою замкненою підмножиною в $\mathbb{R}$. Друга, що для кожної граничної точки послідовності дійсних чисел існує збіжна до цієї точки підпослідовність. Ми встановлюємо, для яких слабших видів збіжності виконуються ці дві властивості, використовуючи поняття фільтра, яке було введене ще Картаном у [1].

Далі ми даємо всі необхідні означення і властивості щодо нашої задачі. Більше про фільтри, ультрафільтри та їх застосування можна знайти у будь-якій сучасній книжці з загальної топології, наприклад у [2].

MSC 2000: 40C05, 54A20

Нагадаємо, що *фільтр* $\mathcal{F}$ на $\mathbb{N}$ - це непорожня система підмножин $\mathbb{N}$, яке задовольняє наступні аксіоми: $\emptyset \notin \mathcal{F}$; якщо $A, B \in \mathcal{F}$, то $A \bigcap B \in \mathcal{F}$; для кожного $A \in \mathcal{F}$ якщо $B \supseteq A$, то $B \in \mathcal{F}$.

Послідовність (x_n), $n \in \mathbb{N}$, у топологічному просторі X називається *$\mathcal{F}$-збіжною* до x (ми пишемо $x = \mathcal{F}\text{-}\lim x_n$, або $x_n \to_{\mathcal{F}} x$), якщо для кожного околу U точки x множина $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in U\}$ належить до $\mathcal{F}$.

Зокрема, якщо взяти за $\mathcal{F}$ фільтр множин, доповнення до яких скінченні (фільтр *Фреше*), тоді $\mathcal{F}$-збіжність співпадає зі звичайною збіжністю.

Природне відношення порядку на множині фільтрів на $\mathbb{N}$ визначається наступним чином: $\mathcal{F}_1 \succeq \mathcal{F}_2$, якщо $\mathcal{F}_1 \supseteq \mathcal{F}_2$. Максимальний у сенсі природного відношення порядку фільтр називається *ультрафільтром*. Лемма Цорна гарантує, що кожний фільтр мажорується деяким ультрафільтром. Фільтр $\mathcal{F}$ на $\mathbb{N}$ є ультрафільтром, якщо для кожного $A \subseteq \mathbb{N}$ або A, або $\mathbb{N} \setminus A$ належить до $\mathcal{F}$.

Фільтр $\mathcal{F}$ на $\mathbb{N}$ називається *вільним*, якщо він мажорує фільтр Фреше. В подальшому розгляді, коли ми говоримо “фільтр", ми маємо на увазі вільний фільтр на $\mathbb{N}$. Зокрема, кожна збіжна у звичайному сенсі послідовність буде автоматично $\mathcal{F}$-збіжною.

Якщо G – центрована система підмножин (тобто всі скінчені перетини елементів G – непорожні), то існує фільтр, що містить всі елементи G. Найменший фільтр, що містить всі елементи G, називається *фільтром, породженим G*.

Підмножина $\mathbb{N}$ називається *стаціонарною* відносно фільтра $\mathcal{F}$ (або просто $\mathcal{F}$-стаціонарною), якщо вона має непорожній перетин з кожним елементом фільтра. Позначимо систему всіх $\mathcal{F}$-стаціонарних множин через $\mathcal{F}^*$. Для $I \in \mathcal{F}^*$ ми називаємо систему множин $\{A \cap I : A \in \mathcal{F}\}$ *слідом $\mathcal{F}$ на I* (що є звичайно фільтром на I), а через $\mathcal{F}(I)$ позначимо фільтр на $\mathbb{N}$, породжений слідом $\mathcal{F}$ на I. Очевидно, $\mathcal{F}(I)$ мажорує $\mathcal{F}$. Кожна підмножина $\mathbb{N}$ є або елементом фільтру $\mathcal{F}$, або доповненням до елемента $\mathcal{F}$, або як множина, так і її доповнення є $\mathcal{F}$-стаціонарними множинами. $\mathcal{F}^*$ – це в точності об'єднання всіх ультрафільтрів, що мажорують $\mathcal{F}$. $\mathcal{F}^*$ є фільтром тоді й тільки тоді, коли він збігається з $\mathcal{F}$ і $\mathcal{F}$ є ультрафільтром.

$\mathcal{F}$-збіжність на стаціонарних множинах є аналогом звичайної збіжності підпослідовностей.

Твердження 1. *Нехай X – топологічний простір, x_n, $x \in X$ і $\mathcal{F}$ – фільтр на $\mathbb{N}$. Тоді наступні умови еквівалентні:*

1. *(x_n) – $\mathcal{F}$-збіжна до x;*
2. *(x_n) – $\mathcal{F}(I)$-збіжна до x для кожного $I \in \mathcal{F}^*$;*
3. *x – гранична точка $(x_n)_{n\in I}$ для кожного $I \in \mathcal{F}^*$;*
4. *(x_n) – $\mathcal{U}$-збіжна до x для кожного ультрафільтра $\mathcal{U} \succeq \mathcal{F}$.*

Доведення. Імплікації (1) $\Rightarrow$ (2), (2) $\Rightarrow$ (3) і (1) $\Rightarrow$ (4) є очевидними. Покажемо, що (3) $\Rightarrow$ (1) і (4) $\Rightarrow$ (3). Припустимо, x_n не $\mathcal{F}$-збіжна до x. Тоді існує такий окіл U точки x, що у кожній $A \in \mathcal{F}$ для деякого $j \in A$ буде $x_j \notin U$. Отже, $I = \{j \in \mathbb{N} : x_j \notin U\}$ – стаціонарна множина і x не є граничною точкою для $(x_n)_{n\in I}$. Тому для будь якого $\mathcal{U} \succeq \mathcal{F}(I)$ $x_n \not\to_{\mathcal{U}} x$.

Точка $x \in X$ називається *граничною точкою послідовності* (x_n) *відносно* $\mathcal{F}$ (або просто $\mathcal{F}$-граничною), якщо x належить до замикання $\{x_n\}_{n\in A}$ для кожного $A \in \mathcal{F}$. Множину всіх $\mathcal{F}$-граничних точок послідовності (x_n) позначимо через $LIM_{\mathcal{F}}(x_n)$. $LIM_{\mathcal{F}}(x_n)$ є замкненою множиною. Якщо $\mathcal{F}_2 \succeq \mathcal{F}_1$, то $LIM_{\mathcal{F}_2}(x_n) \subseteq LIM_{\mathcal{F}_1}(x_n)$.

Твердження 2. *Нехай X – топологічний простір, x_n, $x \in X$, а $\mathcal{F}$ – фільтр на $\mathbb{N}$. Тоді наступні умови еквівалентні:*

1. *$x \in LIM_{\mathcal{F}}(x_n)$;*
2. *для кожного околу U точки x існує така стаціонарна множина $I \in \mathcal{F}^*$, що $\{x_n : n \in I\} \subseteq U$;*
3. *існує ультрафільтр $\mathcal{U} \succeq \mathcal{F}$, що $x_n \to_{\mathcal{U}} x$.*

Доведення. Імплікації (3) $\Rightarrow$ (2), (2) $\Rightarrow$ (1) очевидні. Імплікація (1) $\Rightarrow$ (2) – стандартний факт (див., наприклад, [3], § 7.3., с. 101).

Тепер ми маємо все необхідне для узагальнення оголошених властивостей на випадок фільтрів.

2 Основні результати

На відміну від звичайної збіжності, для фільтрів властивість існування збіжної підпослідовності має місце не тільки для метричних просторів. Тому ми розглянемо два випадки.

Теорема 3. *Для фільтра $\mathcal{F}$ на $\mathbb{N}$ наступні умови еквівалентні:*

1. *для кожного топологічного простору X і послідовності (x_n) в X якщо $x \in LIM_{\mathcal{F}}(x_n)$, то існує $I \in \mathcal{F}^*$, для якого $x_n \to_{\mathcal{F}(I)} x$.*
2. *для кожного ультрафільтра $\mathcal{U} \succeq \mathcal{F}$ існує $I \in \mathcal{F}^*$, для якого $\mathcal{F}(I) = \mathcal{U}$.*

Доведення. (1) $\Rightarrow$ (2). Розглянемо стоун-чехівську компактифікацію натурального ряду $X = \beta\mathbb{N}$. Нагадаємо, що $\beta\mathbb{N}$ ототожнюється з множиною всіх (у тому числі невільних) ультрафільтрів на $\mathbb{N}$. Топологія на X породжується базою $\{\tilde{A} : A \subseteq \mathbb{N}\}$, де $\tilde{A} = \{\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N} : A \in \mathcal{U}\}$.

Візьмемо на X послідовність невільних ультрафільтрів $x_n = \{A \subseteq \mathbb{N} : \ n \in A\}$. Тоді нескладно побачити, що множина $LIM_{\mathcal{F}}(x_n)$ збігається з множиною всіх ультрафільтрів, що мажорують $\mathcal{F}$. Для будь-якого ультрафільтра $x \succeq \mathcal{F}$ збіжність $x_n \to_{\mathcal{F}(I)} x$ за означенням можна переписати як те, що для кожного околу $\tilde{A}$ точки x ми маємо $\{n : \ x_n \in \tilde{A}\} \in \mathcal{F}(I)$, тобто просто $A \in \mathcal{F}(I)$. Це і означає, що $x = \mathcal{F}(I)$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Прямий наслідок Твердження 2.

Теорема 4. *Для фільтра $\mathcal{F}$ на $\mathbb{N}$ наступні умови еквівалентні:*

1. *для кожного метричного простору X і послідовності (x_n) в X якщо $x \in LIM_{\mathcal{F}}(x_n)$, то існує $I \in \mathcal{F}^*$, для якого $x_n \to_{\mathcal{F}(I)} x$.*
2. *для будь-якого фіксованого метричного простору X і кожної послідовності (x_n) в X якщо $x \in LIM_{\mathcal{F}}(x_n)$, то існує $I \in \mathcal{F}^*$, для якого $x_n \to_{\mathcal{F}(I)} x$.*
3. *Для кожної спадної послідовності (I_n) в $\mathcal{F}^*$, $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots$, існує $I \in \mathcal{F}^*$, для якого $I_n \in \mathcal{F}(I)$.*

Доведення. (1) $\Rightarrow$ (2) – очевидно. (2) $\Rightarrow$ (3). Нехай $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ – злічення база околів точки x, $U_1 \neq X$, $U_1 \supseteq U_2 \supseteq \dots$. Для будь-яких $I_n \subset \mathcal{F}^*$,

$I_1 \supseteq I_2 \supseteq \ldots$ розглянемо таку послідовність (x_n), що $x_n \in Uk \setminus U_{k-1}$ якщо $n \in I_k \setminus I_{k-1}$ для кожного $k \in \mathbb{N}$ (тут $U_0 = X$ і $I_0 = \emptyset$).

Отримуємо, що для кожного U_k існує $I_k \in \mathcal{F}^*$, для якого $\{x_n : n \in I_k\} \subseteq U_k$, тобто $x \in LIM_{\mathcal{F}}(x_n)$. За умовою, існує така множина $I \in \mathcal{F}^*$, що для кожного U_k множина $\{n : \ x_n \in U_k\} \in \mathcal{F}(I)$. З іншого боку, $\{n : \ x_n \in U_k\}$ за побудовою дорівнює I_k. Тобто $I_k \in \mathcal{F}(I)$, що і треба було довести.

(3) $\Rightarrow$ (1). Нехай $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ – зліченна база околів x довільного метричного простору X. Можемо вважати, що $U_1 \supseteq U_2 \supseteq \ldots$. Для кожного U_k множина $I_k := \{n : \ x_n \in U_k\}$ належить до $\mathcal{F}^*$ та $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \ldots$. За умовою, існує така множина $I \in \mathcal{F}^*$, що $I_n \in \mathcal{F}(I)$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Тому для довільного околу $U(x)$, знайшовши таке m, що $U_m \subseteq U(x)$, ми отримаємо $\{x_n : n \in I_m\} \subseteq U(x)$, що і треба було довести.

Теорема 5. *Нехай X – нескінченний гаусдорфів топологічний простір, $\mathcal{F}$ – фільтр на $\mathbb{N}$. Наступні умови еквівалентні:*

1. *для кожного сепарабельного підпростору Y в X існує така послідовність (x_n) в X, що $LIM_{\mathcal{F}}(x_n) = Y$;*
2. *існує розбиття $\mathbb{N} = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} I_k$, де $I_k \in \mathcal{F}^*$;*
3. *існує нескінченна кількість ультрафільтрів, що мажорують $\mathcal{F}$.*

Доведення. (1) $\Rightarrow$ (3). В Y є нескінчена кількість точок. Для кожної точки $x \in LIM_{\mathcal{F}}(x_n)$ існує свій ультрафільтр $\mathcal{U} \succeq \mathcal{F}$, за яким послідовність x_n збігається до x. Таким чином маємо нескінченну кількість ультрафільтрів $\mathcal{U} \succeq \mathcal{F}$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Розглянемо фільтри $\mathcal{F}(I_k)$, $k = 1, 2, \ldots$. Кожен з них мажорується якимось ультрафільтром $\mathcal{U}_k \succeq \mathcal{F}(I_k)$. Диз'юнктність I_k гарантує, що $\mathcal{U}_k$ – попарно різні. Таким чином, ми маємо нескінченну кількість ультрафільтрів $\mathcal{U}_k \succeq \mathcal{F}$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Нехай $K = \{y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ – зліченна щільна множина в Y. Побудуємо послідовність (x_n) обравши $x_i := y_m$ для $i \in I_m$. Тоді для кожного m і кожного $A \in \mathcal{F}$ маємо $y_m \in \{x_n\}_{n \in A \cap I_m} \subseteq \{x_n\}_{n \in A}$, тобто $K \subset LIM_{\mathcal{F}}(x_n)$. Через те, що $LIM_{\mathcal{F}}(x_n)$ замкнена підмножина Y, ми отримуємо, що $Y = LIM_{\mathcal{F}}(x_n)$.

(3) $\Rightarrow$ (2). Припустимо, це не так. Покажемо, що існує $N \in \mathbb{N}$ і таке розбиття $\mathbb{N} = \bigsqcup_{k=1}^{N} I_k$, $I_k \in \mathbb{N}$, що жодне I_k не можна розбити на дві

$\mathcal{F}$-стаціонарні множини. Справді, інакше, розбивши якесь $I_k = J_{1,k} \sqcup J_{2,k}$, $J_{1,k}, J_{2,k} \in \mathcal{F}^*$, можна повторити розбиття для $N+1$ стаціонарної множини, і так далі, доки не отримаємо розбиття $\mathbb{N} = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} I_k$, $I_k \in \mathcal{F}^*$. Це означає, що $\mathcal{F}(I_k)$, $k = 1, 2, \ldots, N$ ультрафільтри. За умовою, існує ще деякий ультрафільтр $\mathcal{U}$ окрім $\mathcal{F}(I_k)$, $k = 1, 2, \ldots, N$. Отже, існують такі $A_k \in \mathcal{U}$, що $A_k \notin \mathcal{F}(I_k)$. Тоді $A = \bigcap_{k=1}^{N} A_k \in \mathcal{U}$, але $A \notin \mathcal{F}(I_k)$, тобто $A \in \mathcal{F}^*$, але $A \cap I_k \notin \mathcal{F}^*$. Отримаємо суперечність з тим, що $\mathbb{N} = \bigsqcup_{k=1}^{N} I_k$.

3 Фільтри, що породжені матрицями підсумовування

У цьому розділі ми досліджуємо матричне узагальнення статистичної збіжності відносно двох властивостей, які ми розглядаємо. Незважаючи на те, що методи підсумовування і статистична збіжність були введені окремо і до недавнього часу розвивалися незалежно, вони тісно пов'язані. Означення статистичної збіжності було введено Фастом [4], який використовував щільність множин в $\mathbb{N}$. Послідовність дійсних чисел x_k *статистично збігається до* x якщо для кожного $\varepsilon > 0$ множина $\{k : |x_k - x| > \varepsilon\}$ має натуральну щільність 0, де натуральна щільність підмножини $A \subset \mathbb{N}$ визначається як $d(A) := \lim_n n^{-1}|\{k \leq n : k \in A\}|$. Статистична збіжність є узагальненням звичайного поняття збіжності, і в свою чергу узагальнювалася багатьма способами ([5, 6, 7, 8, 9, 10]). Огляд теорії статистичної збіжності читач може знайти, наприклад, у [11]. У цьому розділі ми використовуємо узагальнення статистичної збіжності через матрично визначену щільність, як у [7].

Ми називаємо $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$-матрицю $\varphi = (\varphi_{i,j})$ *матрицею підсумовування*, якщо

1. $\varphi_{i,j} \geq 0$ для всіх i, j, та $\varphi_{i,j} = 0$ для $j > i$;
2. $\lim_{i\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_{i,j} = 1$;
3. $\lim_{i\to\infty} \varphi_{i,j} = 0$ для кожного $j \in \mathbb{N}$.

Для матриці підсумовування φ та $I \subseteq \mathbb{N}$ нехай

$$d_\varphi(I) = \lim_{i\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_{i,j} \chi_I(j),$$

коли ця границя існує. Оскільки $d_\varphi(I)$ для деяких підмножин $\mathbb{N}$ не існує, будемо також використовувати верхню щільність $\overline{d}_\varphi(I) := \limsup_{i\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_{i,j}\chi_I(j)$. Говорять, що послідовність x_k *φ-статистично збігається до x* якщо для кожного $\varepsilon > 0$, $d_\varphi(\{k : |x_k - x| > \varepsilon\}) = 0$. Якщо $\varphi = C_1$ – матриця Чезаро (тобто $\varphi_{i,j} = 1/i$ для $j \le i$), то d_{C_1} є функцією натуральної щільності, яка породжує звичайну статистичну збіжність.

Для матриці підсумовування φ визначимо $\mathcal{F}_\varphi = \{A \subseteq \mathbb{N} : d_\varphi(\mathbb{N}\setminus A) = 0\}$ та зазначимо, що $\mathcal{F}_\varphi$ – фільтр на $\mathbb{N}$. Нескладно побачити, що $\mathcal{F}_\varphi$-збіжність і φ-статистична збіжність це одне і те ж, та що множина I є $\mathcal{F}_\varphi$-стаціонарною тоді й тільки тоді, коли $\overline{d}_\varphi(I) > 0$.

Нарешті ми готові встановити, які з наших властивостей мають фільтри, породжені матричними методами підсумовування.

Теорема 6. *Нехай φ – матриця підсумовування. Тоді фільтр $\mathcal{F}_\varphi$ має властивість теореми 5.*

Доведення. Розглянемо два випадки:

1. $m_i := \max_{k\in\mathbb{N}} \varphi_{ik} \not\to_{i\to\infty} 0$. Тоді існує $\delta > 0$ і послідовність (i_n) така, що $m_{i_n} > \delta$. Якщо k_i – ті стовпці, де досягається максимум $\varphi_{ik_i} = m_i$, то, вибираючи $I = (k_i)$, маємо, що $I \in \mathcal{F}_\varphi^*$ та $\mathcal{F}_\varphi(I)$ є фільтр Фреше на I. Отже, будь-яке розбиття $I = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} J_n$ на нескінченні J_n в об'єднанні з $\mathbb{N}\setminus I$ дає нам те, що треба.

2. $m_i := \max_{k\in\mathbb{N}} \varphi_{ik} \to_{i\to\infty} 0$. Тоді для будь-якого $I \in \mathcal{F}_\varphi^*$ з $\overline{d}_\varphi(I) = \alpha$, і будь-якого $\delta > 0$ існує така підмножина $J \subseteq I$, що $|\overline{d}_\varphi(J) - \alpha/2| < \delta$. Для побудови J знайдемо таке $N \in \mathbb{N}$, що для всіх $i > N$ $\max_{k\in\mathbb{N}} \varphi_{ik} < \delta/2$, та знайдемо такі (i_n), $i_0 = N$, що $\sum_{k=i_{n-1}+1}^{i_n} \varphi_{i_nk}\chi_I(k) > \alpha - \delta/2$. Тобто існують такі $J_n \subset (i_{n-1}, i_n] \cap \mathbb{N}$, що $|\sum_{k=1}^{i_n} \varphi_{i_nk}\chi_{J_n}(k) - \alpha/2| < \delta$, і заявлене J – це $\bigsqcup_{n=1}^{\infty} J_n$. Таким чином ми можемо спочатку розбити $\mathbb{N}$ на дві $\mathcal{F}_\varphi$-стаціонарні множини, а потім розбивати кожну наступну множину на дві з ненульовою верхньою щільністю. Продовжуючи до нескінченності, отримаємо потрібне розбиття.

Теорема 7. *Нехай φ – матриця підсумовування. Наступні умови еквівалентні:*

1. *фільтр $\mathcal{F}_\varphi$ має властивість теореми 4.*
2. $\inf_{I\in\mathcal{F}_\varphi^*} \overline{d}_\varphi(I) > 0$.

3. існує $\delta > 0$, що для кожного $I \in \mathcal{F}_\varphi^*$ існує така послідовність індексів (i_n) в $\mathbb{N}$, що $\max_{k\in I}\varphi_{i_n k} > \delta$, $n \in \mathbb{N}$.

Доведення. (1) $\Rightarrow$ (2). Умова (1) у термінах φ-щільності має наступний вигляд: для кожної спадної послідовності множин $I_n \subseteq \mathbb{N}$, $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots$ з $\overline{d}_\varphi(I_n) > 0$ для кожного $n \in \mathbb{N}$ існує $I \subseteq \mathbb{N}$, $\overline{d}_\varphi(I) = \alpha > 0$, що $\overline{d}_\varphi(I_n \cap I) = \alpha$ і $\overline{d}_\varphi(I \setminus I_n) = 0$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Припустимо, що $\inf_{I\in\mathcal{F}_\varphi^*}\overline{d}_\varphi(I) = 0$. Тоді існує така послідовність $(J_k) \subset \mathcal{F}_\varphi^*$, що $\overline{d}_\varphi(J_k) < 2^{-k}$. Поклавши $I_n := \bigcup_{k=n}^\infty J_k$, ми отримуємо вже спадну послідовність $(I_n) \subset \mathcal{F}_\varphi^*$ з $\overline{d}_\varphi(I_n) \to_{n\to\infty} 0$, що суперечить існуванню $I \in \mathcal{F}_\varphi^*$, з $\overline{d}_\varphi(I_n \cap I) = \alpha$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Візьмемо довільну спадну послідовність множин $I_n \in \mathcal{F}_\varphi^*$, $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots$. З умови $\inf_{n\in\mathbb{N}}\overline{d}_\varphi(I_n) = \alpha > 0$ випливає існування такої підпослідовності (I_{n_l}) послідовності (I_n), що $|\overline{d}_\varphi(I_{n_l}) - \alpha| < \frac{1}{2l}$ і для кожного $l \in \mathbb{N}$ існує індекс i_l, для якого $|\sum_{k=1}^{i_l}\varphi_{i_l k}\chi_{I_{n_l}}(k) - \alpha| < \frac{1}{2l}$. Поклавши $\Delta_l = I_{n_l} \cap \{1, 2, \dots, i_l\}$ і $I := \bigcup_{l=1}^\infty \Delta_l$, нескладно побачити, що $\overline{d}_\varphi(I) = \alpha$. Взявши в якості $l(n)$ найменше l, для якого $n_l \geq n$, отримаємо $\overline{d}_\varphi(I_n \cap I) = \overline{d}_\varphi(\bigcup_{k=l(n)}^\infty \Delta_k) = \alpha$ і $\overline{d}_\varphi(I \setminus I_n) = \overline{d}_\varphi(\bigcup_{k=1}^{l(n)-1}\Delta_k) = 0$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Нехай $\inf_{I\in\mathcal{F}_\varphi^*}\overline{d}_\varphi(I) = \alpha > 0$, але для $\delta < \alpha/8$ існують такі $I \in \mathcal{F}_\varphi^*$ і $N \in \mathbb{N}$, що для всіх $i > N$ $\max_{k\in I}\varphi_{ik} < \delta$. Це гарантує існування (i_n), $i_0 = N$, що $\sum_{k=i_{n-1}+1}^{i_n}\varphi_{i_n k}\chi_I(k) > \overline{d}_\varphi(I) - \delta$. Отже, оцінка $\max_{k\in I}\varphi_{ik} < \delta$ дає можливість знайти $J \subseteq I$ з верхньою щільністю $\alpha/2$ з точністю до 2δ: $|\overline{d}_\varphi(J) - \alpha/2| < 2\delta$, а це суперечить рівності $\inf_{I\in\mathcal{F}_\varphi^*}\overline{d}_\varphi(I) = \alpha$.

(3) $\Rightarrow$ (2). Очевидно.

Як наслідок цієї теореми маємо необхідну умову на матрицю φ для виконання властивості теореми 4: $\max_{k\in\mathbb{N}}\varphi_{ik} \not\to_{i\to\infty} 0$. Отже, фільтр статистичної збіжності $\mathcal{F}_{C_1}$ не задовольняє цієї властивості.

[1] *Cartan H.* Théorie des filtres // CR Acad. Paris, – 1937. – **205**. – P. 595–598.

[2] *Todorcevic S.* Topics in topology. Lecture Notes in Mathematics **1652**, Springer Verlag, Berlin, 1997.

[3] *Бурбаки Н.* Общая топология. Основные структуры. – М.: Наука, 1968. – 272 с.

[4] *Fast H.* Sur la convergence statistique // Colloq. Math. – 1951. – **2**. – P. 241-244.

[5] *Connor J.* R-type summability methods, Cauchy criteria, P-sets and statistical convergence // Proc. Amer. Math. Soc. – 1992. – **115**, no. 2. – P. 319-327.

[6] *Connor J.* Two valued measures and summability, // Analysis – 1990. – **10**, P. 373-385.

[7] *Connor J. and Kline J.* On statistical limit points and the consistency of statistical convergence // J. Math. Anal. Appl. – 1996. – **197**, no. 2. – P. 392-399.

[8] *Fridy J. and Orhan C.* Lacunary statistical convergence // Pacific J. Math. – 1993. – **160**. – P. 43-51.

[9] *Kolk E.* Matrix summability of statistically convergent sequences // Analysis. – 1993. – **13**, no. 2. – P. 77-83.

[10] *Miller H.* A measure theoretical subsequence characterization of statistical convergence // Trans. Amer. Math. Soc. – 1995. – **347**. – P. 1811-1819.

[11] *Connor J.* A topological and functional analytic approach to statistical convergence // Analysis of Divergence (Orono, ME, 1997), Applied Numer. Harmon. Anal., Birkhauser, Boston, MA, – 1999. – P. 403-413.

ON FILTER CLUSTER POINTS OF SEQUENCES

Oleksandr LEONOV

V.N. Karazin Kharkiv National University

Department of Mechanics and Mathematics
Kharkov National University
pl. Svobody 4, 61077 Kharkov, Ukraine
e-mail: *leonov_family@mail.ru*

We consider filter generalization of the following two properties of the usual convergence: (1) the set of cluster points of sequence of real numbers can be every closed subset of $\mathbb{R}$; (2) for every cluster point of sequence of real numbers there is converging to this point subsequence. We characterize the corresponding classes of filters for the general case and for the case of filters generated by a matrix summability method.