ЗАПРОВАДЖЕННЯ ГІБРИДНОГО ІНТЕГРАЛЬНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ТИПУ БЕССЕЛЯ-ЕЙЛЕРА-ЛЕЖАНДРА НА ПОЛЯРНІЙ ВІСІ

©2008 р. Михайло ЛЕНЮК, Олег ЛЕНЮК

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, вул. Коцюбинського, 2, Чернівці, 58012

Редакція отримала статтю 25 жовтня 2008 р.

Методом дельта-подібної послідовності (ядро Діріхле) запроваджено інтегральне перетворення, породжене на полярній вісі з двома точками спряження гібридним диференціальним оператором Бесселя-Ейлера-Лежандра.

Розглянемо диференціальні оператори Бесселя $B_{\nu,\alpha_1} = \dfrac{d^2}{dr^2} + \dfrac{2\alpha_1+1}{r}\dfrac{d}{dr} - \dfrac{\nu^2-\alpha_1^2}{r^2}$, Ейлера $B^*_{\alpha_2} = r^2\dfrac{d^2}{dr^2} + (2\alpha_2+1)r\dfrac{d}{dr} + \alpha_2^2$ [2] та Лежандра $\Lambda_{(\mu)} = \dfrac{d^2}{dr^2} + \operatorname{cth} r\dfrac{d}{dr} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{\mu_1^2}{1-\operatorname{ch} r} + \dfrac{\mu_2^2}{1+\operatorname{ch} r}\Big)$ [3]; $\nu \geq \alpha_1 > -1/2$, $2\alpha_2+1>0$, $\mu_1 \geq \mu_2 \geq 0$, $(\mu) = (\mu_1, \mu_2)$.

За допомогою одиничної функції Гевісайда $\theta(x)$ утворимо гібридний диференціальний оператор (ГДО)

$$\mathfrak{M}^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)} = \theta(r)\theta(R_1-r)a_1^2 B_{\nu,\alpha_1} + \theta(r-R_1)\theta(R_2-r)a_2^2 B^*_{\alpha_2} + \theta(r-R_2)a_3^2\Lambda_{(\mu)}, \tag{1}$$

$(\alpha) = (\alpha_1, \alpha_2)$, $a_j > 0$, $j = \overline{1,3}$, $\theta(x) = \begin{cases} 1, & x>0, \\ 0, & x<0. \end{cases}$

Означення. Областю задання ГДО $\mathfrak{M}^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}$ назвемо множину G "вектор-функцій" $g(r) = \{g_1(r); g_2(r); g_3(r)\}$ з такими властивостями:

1) "вектор-функція" $f(r) = \{B_{\nu,\alpha_1}[g_1(r)]; B^*_{\alpha_2}[g_2(r)]; \Lambda_{(\mu)}[g_3(r)]\}$ неперервна на множині $I_2^+ = \{r: \ r \in (0,R_1) \cup (R_1,R_2) \cup (R_2,\infty)\}$;

УДК 517.51, MSC 2000: 54C20, 54C05

2) функції $g_j(r)$ задовольняють умови спряження

$$\Big[(\alpha_{j1}^k d/dr + \beta_{j1}^k) g_k(r) - (\alpha_{j2}^k d/dr + \beta_{j2}^k) g_{k+1}(r)\Big]\Big|_{r=R_k} = 0,\ j,k = 1,2; \quad (2)$$

3) існують такі числа γ_1 і γ_2, що мають місце співвідношення

$$\lim_{r\to 0}[r^{\gamma_1} g_1(r)] = 0, \quad \lim_{r\to\infty}[r^{\gamma_2} g_3(r)] = 0. \quad (3)$$

Ми вважаємо, що $c_{1k}c_{2k} > 0$, $c_{jk} = \alpha_{2j}^k \beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \beta_{2j}^k$, $j,k = 1,2$, $\alpha_{jm}^k \geq 0$, $\beta_{jm}^k \geq 0$.

Якщо $u(r) \in G$, $v(r) \in G$, то з умов спряження випливає базова тотожність

$$\Big[u_k(r)\frac{dv_k(r)}{dr} - \frac{du_k(r)}{dr} v_k(r)\Big]\Big|_{r=R_k} =$$

$$= \frac{c_{2k}}{c_{1k}}\Big[u_{k+1}(r)\frac{dv_{k+1}(r)}{dr} - v_{k+1}(r)\frac{du_{k+1}(r)}{dr}\Big]\Big|_{r=R_k}, k = 1,2. \quad (4)$$

Визначимо вагову функцію

$$\sigma(r) = \theta(r)\theta(R_1 - r)\sigma_1 r^{2\alpha_1+1} + \theta(r-R_1)\theta(R_2-r)\sigma_2 r^{2\alpha_2-1} + \theta(r-R_2)\sigma_3 \operatorname{sh} r$$

та скалярний добуток

$$(u(r), v(r)) = \int_0^\infty u(r)v(r)\sigma(r)dr \equiv \int_0^{R_1} u_1(r)v_1(r)\sigma_1 r^{2\alpha_1+1}dr +$$

$$+ \int_{R_1}^{R_2} u_2(r)v_2(r)\sigma_2 r^{2\alpha_2-1}dr + \int_{R_2}^{\infty} u_3(r)v_3(r)\sigma_3 \operatorname{sh} r dr. \quad (5)$$

Тут беруть участь величини:

$$\sigma_1 = \frac{c_{11}c_{12}}{c_{21}c_{22}} \frac{R_1^{2\alpha_2+1}}{R_1^{2\alpha_1+1}} \frac{\operatorname{sh} R_2}{R_2^{2\alpha_2+1}} \frac{1}{a_1^2}, \sigma_2 = \frac{c_{12}}{c_{22}} \frac{\operatorname{sh} R_2}{R_2^{2\alpha_2+1}} \frac{1}{a_2^2}, \sigma_3 = \frac{1}{a_3^2} 1.$$

На підставі базової тотожності (4) та властивостей функцій $u(r) \in G$ та $v(r) \in G$ встановлюємо, що

$$(\mathfrak{M}_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}[u], v(r)) = (u(r), \mathfrak{M}_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}[v(r)]) \quad (6)$$

Отже, ГДО $\mathfrak{M}_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}$ – самоспряжений. Значить, спектр його дійсний. Оскільки диференціальний оператор $\mathfrak{M}_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}$ має одну особливу точку $r =$

∞ [4], то його спектр неперервний. Можна вважати, що спектральний параметр $\beta \in (0, \infty)$. Знайдемо відповідну спектральному параметру β спектральну функцію

$$V_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(r,\beta) = \theta(r)\theta(R_1 - r)V_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta) + \theta(r - R_1)\theta(R_2 - r)V_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta)+$$
$$+\theta(R_2 - r)V_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta). \quad (7)$$

Структура ГДО $\mathfrak{M}_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}$ показує, що функції $V_{\nu,(\alpha);j}^{(\mu)}(r,\beta)$ повинні бути розв'язком диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned}
&(B_{\nu,\alpha_1} + b_1^2)V_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)}(r,\beta) = 0, \quad r \in (0, R_1),\\
&(B_{\alpha_2}^* + b_2^2)V_{\nu,(\alpha);2}^{(\mu)}(r,\beta) = 0, \quad r \in (R_1, R_2), \qquad (8)\\
&(\Lambda_{(\mu)} + b_3^2)V_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta) = 0, \quad r \in (R_2, \infty),
\end{aligned}$$

й задовольняти умови спряження (2) та граничні співвідношення (3), $b_j = a_j^{-1}(\beta^2 + k_j^2)^{1/2}$, $k_j^2 \geq 0$, $j = \overline{1,3}$.

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Бесселя $(B_{\nu,\alpha_1} + b_1^2)v = 0$ утворюють функції Бесселя 1-го роду $J_{\nu,\alpha_1}(b_1 r)$ та 2-го роду $N_{\nu,\alpha_1}(b_1 r)$ [1]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Ейлера $(B_{\alpha_2}^* + b_2^2)v = 0$ утворюють функції $r^{-\alpha_2}\cos(b_2 \ln r)$ та $r^{-\alpha_2}\sin(b_2 \ln r)$ [2]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Лежандра $(\Lambda_{(\mu)} + b_3^2)v = 0$ утворюють узагальнені приєднані функції Лежандра 1-го роду $A_{-1/2+ib_3}^{(\mu)}(\operatorname{ch} r)$ та 2-го роду $B_{-1/2+ib_3}^{(\mu)}(\operatorname{ch} r)$ [3].

Якщо покласти

$$\begin{aligned}
&V_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta) = A_1 J_{\nu,\alpha_1}(b_1 r),\\
&V_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta) = A_2 r^{-\alpha_2}\cos(b_2 \ln r) + B_2 r^{-\alpha_2}\sin(b_2 \ln r), \qquad (9)\\
&V_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta) = A_3 A_{\nu_3}^{(\mu)}(\operatorname{ch} r) + B_3 B_{\nu_3}^{(\mu)}(\operatorname{ch} r), \quad \nu_3 = -1/2 + ib_3,
\end{aligned}$$

то умови спряження (3) для визначення пяти величин A_j $(j = \overline{1,3})$ та B_k $(k = 1, 2)$ дають алгебраїчну систему з чотиьох рівнянь:

$$u_{\nu,\alpha_1;j1}^{11}(b_1 R_1)A_1 - Y_{\alpha_2;j2}^{11}(b_2, R_1)A_2 - Y_{\alpha_2;j2}^{12}(b_2, R_1)B_2 = 0, j = 1, 2,$$

$$Y_{\alpha_2;j1}^{21}(b_2, R_2)A_2 + Y_{\alpha_2;j1}^{22}(b_2, R_2)B_2 - Y_{\nu_3;j2}^{(\mu),21}(\operatorname{ch} R_2)A_3 - Y_{\nu_3;j2}^{(\mu),22}(\operatorname{ch} R_2)B_3 = 0. \quad (10)$$

В алгебраїчній системі (10) беруть участь функції:

$$u^{11}_{\nu,\alpha_1;j1}(b_1R_1)=\left(\alpha^1_{j1}\frac{\nu-\alpha_1}{R_1}+\beta^1_{j1}\right)J_{\nu,\alpha_1}(b_1R_1)-\alpha^1_{j1}R_1b_1^2J_{\nu+1,\alpha_1+1}(b_1R_1),$$

$$Y^{m1}_{\alpha_2;jk}(b_s,R_m)=\Big[\Big(\beta^m_{jk}-\frac{\alpha^m_{jk}}{R_m}\alpha_2\Big)\cos(b_s\ln R_m)-\frac{b_s}{R_m}\alpha^m_{jk}\sin(b_s\ln R_m)\Big]R_m^{-\alpha_2},$$

$$Y^{m2}_{\alpha_2;jk}(b_s,R_m)=\Big[\Big(\beta^m_{jk}-\frac{\alpha^m_{jk}}{R_m}\alpha_2\Big)\sin(b_s\ln R_m)+\frac{b_s}{R_m}\alpha^m_{jk}\cos(b_s\ln R_m)\Big]R_m^{-\alpha_2},$$

$$Y^{(\mu),21}_{\nu_3;j2}(\operatorname{ch}R_2)=(\alpha^2_{j2}d/dr+\beta^2_{j2})A^{(\mu)}_{\nu_3}(\operatorname{ch}r)\Big|_{r=R_2},$$

$$Y^{(\mu),22}_{\nu_3;j2}(\operatorname{ch}R_2)=(\alpha^2_{j2}d/dr+\beta^2_{j2})B^{(\mu)}_{\nu_3}(\operatorname{ch}r)\Big|_{r=R_2}.$$

Оскільки

$$Y^{11}_{\alpha_2;12}(b_2,R_1)Y^{12}_{\alpha_2;22}(b_2,R_1)-Y^{11}_{\alpha_2;22}(b_2,R_1)Y^{12}_{\alpha_2;12}(b_2,R_1)=$$

$$=\frac{c_{21}b_2}{R_1^{2\alpha_2+1}}\equiv q_{\alpha_2}(\beta)\neq 0,$$

то з перших двох рівнянь системи (10) знаходимо:

$$A_2=\frac{A_1}{q_{\alpha_2}(\beta)}[u^{11}_{\nu,\alpha_1;11}(b_1R_1)Y^{12}_{\alpha_2;22}(b_2,R_1)-u^{11}_{\nu,\alpha_1;21}(b_1R_1)Y^{12}_{\alpha_2;12}(b_2,R_1)],$$

$$B_2=-\frac{A_1}{q_{\alpha_2}(\beta)}[u^{11}_{\nu,\alpha_1;11}(b_1R_1)Y^{11}_{\alpha_2;22}(b_2,R_1)-u^{11}_{\nu,\alpha_1;21}(b_1R_1)Y^{11}_{\alpha_2;12}(b_2,R_1)].$$

Визначимо функції:

$$\delta_{\alpha_2;kj}(\beta)=Y^{11}_{\alpha_2;k2}(b_2,R_1)Y^{22}_{\alpha_2;j1}(b_2,R_2)-Y^{12}_{\alpha_2;k2}(b_2,R_1)Y^{21}_{\alpha_2;j1}(b_2,R_2),$$

$$a_{\nu,(\alpha);j}(\beta)=u^{11}_{\nu,\alpha_1;11}(b_1R_1)\delta_{\alpha_2;2j}(\beta)-u^{11}_{\nu,\alpha_1;21}(b_1R_1)\delta_{\alpha_2;1j}(\beta),k,j=1,2,$$

$$\omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);j}(\beta)=a_{\nu,(\alpha);1}(\beta)Y^{(\mu),2j}_{\nu_3;22}(\operatorname{ch}R_2)-a_{\nu,(\alpha);2}(\beta)Y^{(\mu),2j}_{\nu_3;12}(\operatorname{ch}R_2),j=1,2,$$

$$q_{(\mu)}(\beta)=\frac{c_{22}}{\operatorname{sh}R_2}\frac{1}{S_{(\mu)}(b_3)}\neq 0,$$

$$S_{(\mu)}(b_3)=\frac{2^{\mu_1-\mu_2}\gamma_{(\mu)}(b_3)\pi^3}{\operatorname{sh}2\pi b_3|\Gamma(1/2+ib_3+\nu^+_{12})|^2|\Gamma(1/2+ib_3+\nu^-_{12})|^2},$$

$$\nu^{\pm}_{12}=\frac{1}{2}(\mu_1\pm\mu_2),\gamma_{(\mu)}(b_3)=\frac{\cos\mu_1\pi\operatorname{sh}2\pi b_3}{\cos\mu_2\pi+\cos\mu_1\pi\operatorname{ch}2\pi b_3}.$$

З других двох рівнянь системи (10) при $A_1 = q_{\alpha_2}(\beta)q_{(\mu)}(\beta)$ знаходимо, що $A_3 = -\omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(\beta)$, $B_3 = \omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(\beta)$.

Підставивши обчислені величини A_j та B_k у рівності (9), маємо функції:

$$V_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta) = q_{\alpha_2}(\beta)q_{(\mu)}(\beta)J_{\nu,\alpha_1}(b_1 r),$$

$$V_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta)=q_{(\mu)}(\beta)[u^{11}_{\nu,\alpha_1;11}(b_1R_1)\Psi^1_{\alpha_2;22}(q_2,r)-u^{11}_{\nu,\alpha_1;21}(b_1R_1)\Psi^1_{\alpha_2;12}(q_2,r)],$$

$$V_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta) = \omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(\beta)B^{(\mu)}_{\nu_3}(\operatorname{ch} r) - \omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(\beta)A^{(\mu)}_{\nu_3}(\operatorname{ch} r); \tag{11}$$

$$\Psi^1_{\alpha_2;j2}(q_2,r) = Y^{12}_{\alpha_2;j2}(b_2,R_1)r^{-\alpha_2}\cos(b_2\ln r)-$$

$$-Y^{11}_{\alpha_2;j2}(b_2,R_1)r^{-\alpha_2}\sin(b_2\ln r), j=1,2.$$

Введемо до розгляду спектральну густину

$$\Omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(\beta) = \beta\gamma_{(\mu)}(b_3)S_{(\mu)}(b_3)([\omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(\beta)]^2 + [\gamma_{(\mu)}(b_3)\omega_{\nu,(\alpha);2}(\beta)]^2)^{-1}. \tag{12}$$

Наявність спектральної функції $V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(r,\beta)$, вагової функції $\sigma(r)$ та спектральної щільності $\Omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(\beta)$ дозволяє запровадити гібридне інтегральне перетворення, породжене на множині I_2^+ ГДО $\mathcal{M}^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}$:

$$H_{\nu,(\alpha)}[g(r)] = \int_0^\infty g(r)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(r,\beta)\sigma(r)dr \equiv \tilde{g}(\beta), \tag{13}$$

$$H^{-(\mu)}_{\nu,(\alpha)}[\tilde{g}(\beta)] = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \tilde{g}(\beta)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(r,\beta)\Omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(\beta)d\beta \equiv g(r). \tag{14}$$

Математичним обгрунтуванням формул (13), (14) є твердження.

Теорема 1 (про інтегральне зображення). *Якщо "вектор-функція"*

$$f(r) = [\theta(r)\theta(R_1-r)r^{\alpha_1+1/2} + \theta(r-R_1)\theta(R_2-r)r^{\alpha_2-1/2}+$$

$$+\theta(r-R_2)\exp(2^{-1}r)]g(r)$$

неперервна, абсолютно сумовна й має обмежену варіацію на множині $(0,\infty)$, *то для будь-якого* $r \in I_2^+$ *справджується інтегральне зображення*

$$g(r) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(r,\beta)\Omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(\beta)\int_0^\infty g(\rho)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(\rho,\beta)\sigma(\rho)d\rho d\beta. \tag{15}$$

Доведення проведемо методом дельта-подібних послідовностей: ядро Діріхле.

Для функцій $V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta)$ та $V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(r,\lambda)$ для $\lambda \neq \beta \in (0,\infty)$ справджуються рівності:

$$[B_{\nu,\alpha_1} + a_1^{-2}(\beta^2 + k_1^2)]V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta) = 0, \tag{16}$$

$$[B_{\nu,\alpha_1} + a_1^{-2}(\lambda^2 + k_1^2)]V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(r,\lambda) = 0. \tag{17}$$

Помножимо рівняння (16) на функцію $r^{2\alpha_1+1}V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(r,\lambda)$, а рівняння (17) помножимо на функцію $r^{2\alpha_1+1}V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta)$ й віднімемо від першого друге:

$$V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha;1)}(r,\beta)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(r,\lambda)r^{2\alpha_1+1} = \frac{a_1^2}{\beta^2-\lambda^2}\frac{d}{dr}\Big[r^{2\alpha_1+1}\Big(V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta)$$

$$\times\frac{d}{dr}V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(r,\lambda) - V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(r,\lambda)\frac{d}{dr}V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta)\Big)\Big]. \tag{18}$$

Для функцій $V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta)$ та $V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(r,\lambda)$, де $\lambda \neq \beta \in (0,\infty)$, справджуються рівності:

$$[B^*_{\alpha_2} + a_2^{-2}(\beta^2 + k_2^2)]V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta) = 0, \tag{16}$$

$$[B^*_{\alpha_2} + a_2^{-2}(\beta^2 + k_2^2)]V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(r,\lambda) = 0. \tag{20}$$

Помножимо рівняння (19) на функцію $r^{2\alpha_2-1}V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(r,\lambda)$, а рівняння (20) – на функцію $r^{2\alpha_2-1}V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2)}(r,\beta)$ й віднімемо від першого друге:

$$V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(r,\lambda)r^{2\alpha_2-1} = \frac{a_2^2}{\beta^2-\lambda^2}\frac{d}{dr}\Big[r^{2\alpha_2+1}\Big(V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta)\times$$

$$\times\frac{d}{dr}V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(r,\lambda) - V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(r,\lambda)\frac{d}{dr}V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta)\Big)\Big]. \tag{21}$$

Для функцій $V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta)$ та $V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(r,\lambda)$, де $\lambda \neq \beta \in (0,\infty)$, справджуються рівності:

$$[\Lambda_{(\mu)} + a_3^{-2}(\beta^2 + k_3^2)]V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta) = 0, \tag{22}$$

$$[\Lambda_{(\mu)} + a_3^{-2}(\beta^2 + k_3^2)]V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(r,\lambda) = 0. \tag{23}$$

Помножимо рівняння (22) на функцію $V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(r,\lambda)$, а рівняння (23) – на функцію $V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta)\operatorname{sh} r$ й віднімемо від першого друге:

$$V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(r,\lambda)\operatorname{sh} r = \frac{a_3^2}{\beta^2-\lambda^2}\frac{d}{dr}\Big[\operatorname{sh} r\Big(V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta)\times$$

$$\times\frac{d}{dr}V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(r,\lambda) - V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(r,\lambda)\frac{d}{dr}V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta)\Big)\Big]. \tag{24}$$

Рівняння (18) помножимо на $\sigma_1 dr$ й проінтегруємо по r від $r=0$ до $r=R_1$; рівняння (21) помножимо на $\sigma_2 dr$ й проінтегруємо по r від $r=R_1$ до $r=R_2$; рівняння (24) помножимо на $\sigma_3 dr$ й проінтегруємо по r від $r=R_2$ до $r=R$, де R – як завгодно велике число. Додавши отримані результати, маємо рівність

$$\int\limits_0^R V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(r,\beta)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(r,\lambda)\sigma(r)dr = \frac{\operatorname{sh} r}{\beta^2-\lambda^2}\Big[V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(R,\beta)\frac{d}{dr}V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(R,\lambda)-$$

$$-V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(R,\lambda)\frac{d}{dr}V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(R,\beta)\Big]. \tag{25}$$

Визначимо на сегменті $[c,d]$, де $0<c<d$ неперервну асболютно сумовну функцію $\Psi(\lambda)$ з обмеженою варіацією. Знайдемо величину невласного інтегралу

$$I = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty\Big(\int\limits_c^d \Psi(\lambda)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(r,\lambda)\Omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(\lambda)d\lambda\Big)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(r,\beta)\sigma(r)dr. \tag{26}$$

За означенням збіжності невласного інтегралу

$$I = \frac{2}{\pi}\lim_{R\to\infty}\int\limits_0^R\int\limits_c^d \Psi(\lambda)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(r,\lambda)\Omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(\lambda)d\lambda V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(r,\beta)\sigma(r)dr =$$

$$= \lim_{R\to\infty}\int\limits_c^d\Big(\frac{2}{\pi}\int\limits_0^R V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(r,\lambda)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(r,\beta)\sigma(r)dr\Big)\Psi(\lambda)\Omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(\lambda)d\lambda.$$

На основі рівності (25) маємо:

$$I = \lim_{R\to\infty}\int\limits_c^d \Psi(\lambda)\Omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(\lambda)\frac{2}{\pi}\frac{\operatorname{sh} R}{\beta^2-\lambda^2}\Big[V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(R,\beta)\frac{d}{dr}V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(R,\lambda)-$$

$$-V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(R,\lambda)\frac{d}{dr}V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(R,\beta)\Big]d\lambda. \qquad (27)$$

Скористаємося асимптотикою функцій $A^{(\mu)}_{-1/2+ib_3}(\operatorname{ch} r)$, $B^{(\mu)}_{-1/2+ib_3}(\operatorname{ch} r)$ та їх похідних при достатньо великому значенні R $(R \approx \infty)$ [5]:

$$A^{(\mu)}_{-1/2+\lambda}(\operatorname{ch} r) \approx 2^{-\nu^-}\exp(-2^{-1}r)[\gamma_{(\mu);1}(\lambda)\cos\lambda r + \gamma_{(\mu);2}(\lambda)\sin\lambda r], \nu^{\pm} =$$

$$= \frac{1}{2}(\mu_1 \pm \mu_2), B^{(\mu)}_{-1/2+\lambda}(\operatorname{ch} r) \approx 2^{-\nu^-}\exp(-2^{-1}r)[\gamma_{(\mu);3}(\lambda)\cos\lambda r +$$

$$+\gamma_{(\mu);1}(\lambda)\sin\lambda r], \mu_2),$$

$$\frac{dA^{(\mu)}_{-1/2+\lambda}(\operatorname{ch} r)}{dr} \approx 2^{-\nu^-}\exp(-2^{-1}r)\Big[\Big(\lambda\gamma_{(\mu);2}(\lambda) - \frac{1}{2}\gamma_{(\mu);1}(\lambda)\Big)\cos\lambda r -$$

$$-\Big(\lambda\gamma_{(\mu);1}(\lambda) + \frac{1}{2}\gamma_{(\mu);2}(\lambda)\Big)\sin\lambda r\Big],$$

$$\frac{dB^{(\mu)}_{-1/2+\lambda}(\operatorname{ch} r)}{dr} \approx 2^{-\nu^-}\exp(-2^{-1}r)\Big[\Big(\lambda\gamma_{(\mu);4}(\lambda) - \frac{1}{2}\gamma_{(\mu);3}(\lambda)\Big)\cos\lambda r -$$

$$-\Big(\lambda\gamma_{(\mu);3}(\lambda) + \frac{1}{2}\gamma_{(\mu);4}(\lambda)\Big)\sin\lambda r\Big]. \qquad (28)$$

У рівностях (28) прийняті позначення:

$$a_{(\mu)}(\lambda) = \frac{\sqrt{\pi}}{\operatorname{ch}\pi\lambda}\frac{1}{Z_{(\mu)}(\lambda)}\frac{\Gamma(-i\lambda)}{\Gamma(1/2+i\lambda)\Gamma(1/2-i\lambda-\nu^-)\Gamma(1/2-i\lambda-\nu^+)},$$

$$b_{(\mu)}(\lambda) = \frac{\sqrt{\pi}}{\operatorname{ch}\pi\lambda}\frac{1}{Z_{(\mu)}(\lambda)}\frac{\Gamma(i\lambda)}{\Gamma(1/2-i\lambda)\Gamma(1/2+i\lambda-\nu^-)\Gamma(1/2+i\lambda-\nu^+)},$$

$$c_{(\mu)}(\lambda) = \frac{}{2}\sqrt{\pi}\frac{1}{Z_{(\mu)}(\lambda)}\frac{\Gamma(1/2+i\lambda+\nu^+)\Gamma(1/2+i\lambda+\nu^-)}{\Gamma(1+i\lambda)\Gamma(1/2+i\lambda)},$$

$$Z_{(\mu)}(\lambda) = \cos\mu_1\pi + i\gamma_{(\mu)}(\lambda)\sin\mu_1\pi, \gamma_{(\mu)}(\lambda) = \frac{\cos\mu_1\pi\operatorname{sh}2\pi\lambda}{\cos\mu_2\pi + \cos\mu_1\pi\operatorname{ch}2\pi\lambda},$$

$$\gamma_{(\mu);1}(\lambda) = i\gamma_{(\mu)}(\lambda)[a_{(\mu)}(\lambda) + b_{(\mu)}(\lambda)] + c_{(\mu)}(\lambda)\cos\mu_1\pi,$$

$$\gamma_{(\mu);2}(\lambda) = \gamma_{(\mu)}(\lambda)[a_{(\mu)}(\lambda) - b_{(\mu)}(\lambda)] - ic_{(\mu)}(\lambda)\cos\mu_1\pi,$$

$$\gamma_{(\mu);3}(\lambda) = a_{(\mu)}(\lambda) + b_{(\mu)}(\lambda) - c_{(\mu)}(\lambda)\sin\mu_1\pi,$$

$$\gamma_{(\mu);4}(\lambda) = i[b_{(\mu)}(\lambda) - a_{(\mu)}(\lambda) + c_{(\mu)}(\lambda)\sin\mu_1\pi].$$

Для функції $V^{(\mu)}_{(\nu,(\alpha);3)}(r,\lambda)$ та її похідної маємо асимптотичні рівності:

$$V^{(\mu)}_{(\nu,(\alpha);3)}(r,\lambda) \approx 2^{-\nu^-} \exp(-\frac{r}{2})[g^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(\lambda)\cos b_3(\lambda)r + g^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(\lambda)\sin b_3(\lambda)r],$$

$$\frac{dV^{(\mu)}_{(\nu,(\alpha);3)}(r,\lambda)}{dr} \approx 2^{-\nu^{-1}} \exp(-\frac{r}{2})[g^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(\lambda)\cos b_3(\lambda)r + g^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);4}(\lambda)\sin b_3(\lambda)r].$$

В цих рівностях беруть участь функції:

$$g^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(\lambda) = \gamma_{(\mu);3}(\lambda)\omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(\lambda) - \gamma_{(\mu);1}(\lambda)\omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(\lambda),$$

$$g^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(\lambda) = \gamma_{(\mu);4}(\lambda)\omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(\lambda) - \gamma_{(\mu);2}(\lambda)\omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(\lambda),$$

$$g^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(\lambda) = \Big[\lambda\gamma_{(\mu);4}(\lambda) - \frac{1}{2}\gamma_{(\mu);3}(\lambda)\Big]\omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(\lambda) -$$

$$-\Big[\lambda\gamma_{(\mu);2}(\lambda) - \frac{1}{2}\gamma_{(\mu);1}(\lambda)\Big]\omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(\lambda),$$

$$g^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);4}(\lambda) = \Big[\lambda\gamma_{(\mu);1}(\lambda) + \frac{1}{2}\gamma_{(\mu);2}(\lambda)\Big]\omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(\lambda) -$$

$$-\Big[\lambda\gamma_{(\mu);3}(\lambda) + \frac{1}{2}\gamma_{(\mu);4}(\lambda)\Big]\omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(\lambda).$$

Визначимо функції:

$$G^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(\lambda,\beta) = g^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(\beta)g^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(\lambda) - g^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(\lambda)g^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(\beta) +$$

$$+g^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(\beta)g^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);4}(\lambda) - g^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(\lambda)g^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);4}(\beta),$$

$$G^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(\lambda,\beta) = g^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(\beta)g^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(\lambda) - g^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(\lambda)g^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(\beta) +$$

$$+g^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(\lambda)g^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);4}(\beta) - g^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(\beta)g^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);4}(\lambda),$$

$$G^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(\lambda,\beta) = g^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(\beta)g^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(\lambda) - g^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(\lambda)g^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(\beta) +$$

$$+g^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(\beta)g^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);4}(\lambda) - g^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(\lambda)g^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);4}(\beta),$$

$$G^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);4}(\lambda,\beta) = g^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(\lambda)g^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(\beta) + g^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(\beta)g^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(\lambda) -$$

$$-[g^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(\lambda)g^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);4}(\beta) + g^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(\beta)g^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);4}(\lambda)].$$

Безпосередньо знаходимо, що

$$G^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);j}(\lambda,\lambda)=0, j=1,2,3; G^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);4}(\beta,\beta)=\frac{4\cdot 2^{\nu^-}}{\Omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(\beta)}. \qquad (29)$$

На основі наведених вище асимптотичних рівностей встановлюємо асимптотичну рівність:

$$V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta)\frac{d}{dr}V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(r,\lambda)-V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(r,\lambda)\frac{d}{dr}V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta)\approx$$

$$\approx 2^{-1-\nu^-}e^{-r}[G^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(\lambda,\beta)\cos(q_3^-(\lambda,\beta)r)+G^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(\lambda,\beta)\cos(q_3^+r)+$$

$$+G^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(\lambda,\beta)\sin q_3^+r+G^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);4}(\lambda,\beta)\sin q_3^-r], \qquad (30)$$

$$q_3^{\pm}(\beta,\lambda)=b_3(\beta)\pm b_2(\lambda).$$

Внаслідок асимптотичної рівності (30) формула (27) набуває асимптотичного вигляду:

$$I=\lim_{R\to\infty}\frac{\operatorname{sh}R}{2^{1+\nu^-}e^R}\frac{2}{\pi}\int\limits_c^d\Psi(\lambda)\Omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(\lambda)\frac{1}{\beta+\lambda}\times$$

$$\times\Big[\frac{G^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(\lambda,\beta)}{\beta-\lambda}\cos(q_3^-(\lambda,\beta)R)+\frac{G^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(\lambda,\beta)}{\beta-\lambda}\cos(q_3^+(\lambda,\beta)R)+$$

$$+\frac{G^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(\lambda,\beta)}{\beta-\lambda}\sin(q_3^+(\lambda,\beta)R)+G^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);4}(\lambda,\beta)\frac{\sin(q_3^-(\lambda,\beta)R)}{\beta-\lambda}\Big]d\lambda. \qquad (31)$$

За лемою Рімана [6] границя перших трьох доданків рівна нулю. За лемою Діріхле [6]

$$\lim_{R\to\infty}\frac{\operatorname{sh}R}{2^{\nu^-}e^R}\int\limits_c^d\Big[\frac{\Psi(\lambda)}{\beta+\lambda}\Omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(\lambda)G^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);4}(\lambda,\beta)\Big]\frac{1}{\pi}\frac{\sin(q_3^-R)}{\beta-\lambda}d\lambda=$$

$$=\frac{1}{2\cdot 2^{\nu^-}}\frac{\Psi(\beta)}{2\beta}\Omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(\lambda)G^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);4}(\beta,\beta)=\Psi(\beta),\beta\in[c,d].$$

Отже, шуканий інтеграл

$$I=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty\int\limits_c^d\Psi(\lambda)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(r,\lambda)\Omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(\lambda)d\lambda V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(r,\beta)\sigma(r)dr=$$

$$= \begin{cases} \Psi(\beta), & \beta \in [c,d], \\ 0, & \beta \overline{\in} [c,d]. \end{cases}$$

Якщо функція $\Psi(\lambda)$ має вказані вище властивості на множині $(0,\infty)$, то

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \Psi(\lambda)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(r,\lambda)\Omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(\lambda)d\lambda V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(r,\beta)\sigma(r)dr = \Psi(\beta), \beta\in[0,\infty). \tag{32}$$

Припустимо тепер, що функція

$$g(r) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \Psi(\beta)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(r,\beta)\Omega^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(\beta)d\beta. \tag{33}$$

Помножимо рівність (33) на $V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(r,\lambda)\sigma(r)dr$, де λ – довільне додатне число, й проінтегруємо від $r=0$ до $r=\infty$. Внаслідок рівності (32)одержуємо:

$$\int\limits_0^\infty g(r)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(r,\lambda)\sigma(r)dr = \Psi(\lambda).$$

Підставивши в рівність (33) функцію

$$\Psi(\beta) = \int\limits_0^\infty g(\rho)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(\rho,\beta)\sigma(\rho)d\rho,$$

маємо інтегральне зображення (15).

Зауваження. Якщо "вектор-функція" $g(r)$ кусково-неперервна, то зліва в (15) треба писати замість $g(r)$

$$\frac{1}{2}[g(r-0)+g(r+0)].$$

Застосування запровадженого формулами (13), (14) гібридного інтегрального перетворення до розв'язування відповідних задач математичної фізики базується на основній тотожності інтегрального перетворення ГДО $\mathfrak{M}^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}$, визначеного рівністю (1).

Теорема 2 (про основну тотожність). *Якщо "вектор-функція" $f(r) = \{B_{\nu,\alpha_1}[g_1(r)];\ B^*_{\alpha_2}[g_2(r)];\ \Lambda_{(\mu)}[g_3(r)]\}$ неперервна на множині I_2^+, а функції $g_j(r)$ задовольняють граничні рівності*

$$\lim_{r\to 0} r^{2\alpha_1+1}\Big[\frac{dg_1}{dr}V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta) - g_1(r)\frac{dV^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta)}{dr}\Big] = 0,$$

$$\lim_{r\to\infty} \operatorname{sh} r \Big[\frac{dg_3}{dr} V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta) - g_3(r) \frac{dV^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta)}{dr} \Big] = 0, \qquad (34)$$

та умови спряження

$$\Big[\Big(\alpha^k_{j1} \frac{d}{dr} + \beta^k_{j1} \Big) g_k(r) - \Big(\alpha^k_{j2} \frac{d}{dr} + \beta^k_{j2} \Big) g_{k+1}(r) \Big] \Big|_{r=R_k} = \omega_{jk},\ j,k = 1,2, \quad (35)$$

то справджується основна тотожність інтегрального перетворення ГДО $\mathfrak{M}^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}$, *визначеного рівністю (1):*

$$H^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)} \Big[\mathfrak{M}^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}[g(r)] \Big] =$$

$$= -\beta^2 \tilde{g}(\beta) - \sum_{j=1}^{3} k_j^2 \tilde{g}_j + \sum_{k=1}^{2} h_k [Z^{(\mu),k}_{\nu,(\alpha);12}(\beta)\omega_{2k} - Z^{(\mu),k}_{\nu,(\alpha);22}(\beta)\omega_{1k}]. \qquad (36)$$

У рівності (36) прийняті позначення:

$$\tilde{g}_1(\beta) = \int_0^{R_1} g_1(r) V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta) \sigma_1 r^{2\alpha_1+1} dr,$$

$$\tilde{g}_2(\beta) = \int_{R_1}^{R_2} g_2(r) V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta) \sigma_2 r^{2\alpha_2-1} dr,$$

$$\tilde{g}_3(\beta) = \int_{R_2}^{\infty} g_3(r) V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta) \sigma_3 \operatorname{sh} r dr, h_1 = a_1^2 \sigma_1 R_1^{2\alpha_1+1} c_{11}^{-1},$$

$$h_2 = a_2^2 \sigma_2 R_1^{2\alpha_2+1} c_{12}^{-1}, Z^{(\mu),k}_{\nu,(\alpha);i2}(\beta) = (\alpha^k_{i2} d/dr + \beta^k_{i2}) V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);k+1}(r,\beta) \Big|_{r=R_k},$$

$i, k = 1, 2.$

Доведення. Згідно з формулою (13) маємо:

$$H^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}[\mathcal{M}^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}[g(r)]] = \int_0^{R_1} (a_1^2 B_{\nu,\alpha_1}[g_1(r)]) V_{\nu,(\alpha);1^{(\mu)}}(r,\beta) \sigma_1 r^{2\alpha_1+1} dr +$$

$$+ \int_{R_1}^{R_2} (a_2^2 B^*_{\alpha_2}[g_2(r)]) V_{\nu,(\alpha);2^{(\mu)}}(r,\beta) \sigma_2 r^{2\alpha_2-1} dr +$$

$$+\int\limits_{R_2}^{\infty}(a_3^2\Lambda_{(\mu)}[g_3(r)])V_{\nu,(\alpha);3^{(\mu)}}(r,\beta)\sigma_3\operatorname{sh}r dr.$$

Проінтегруємо під знаком інтегралів два рази частинами:

$$H^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}[\mathcal{M}^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}[g(r)]]=a_1^2\sigma_1\Big(r^{2\alpha_1+1}\Big[\frac{dg_1}{dr}V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta)-g_1(r)\times$$

$$\times\frac{dV^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta)}{dr}\Big]\Big)\Big|_0^{R_1}+\int\limits_0^{R_1}g_1(r)(a_1^2B_{\nu,\alpha_1}[V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta)])\sigma_1r^{2\alpha_1+1}dr+a_2^2\sigma_2\times$$

$$\times\Big(r^{2\alpha_2+1}\Big[\frac{dg_2}{dr}V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta)-$$

$$-g_2(r)\frac{dV^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta)}{dr}\Big]\Big)\Big|_{R_1}^{R_2}+\int\limits_{R_1}^{R_2}g_2(r)(a_2^2B^*_{\alpha_2}[V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta)])\sigma_2r^{2\alpha_2-1}dr+$$

$$+a_3^2\sigma_3\Big(\operatorname{sh}r\Big[\frac{dg_3}{dr}V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta)-g_3(r)\frac{dV^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta)}{dr}\Big]\Big)\Big|_{R_2}^{\infty}+$$

$$+\int\limits_{R_2}^{\infty}g_3(r)(a_3^2\Lambda_{(\mu)}[V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta)])\sigma_3\operatorname{sh}r dr.$$

З диференціальних рівнянь, які задовольняють функції $V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta)$, знаходимо тотожності:

$$a_1^2B_{\nu,\alpha_1}[V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta)]=-(\beta^2+k_1^2)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta),$$

$$a_2^2B^*_{\alpha_2}[V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta)]=-(\beta^2+k_2^2)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta),$$

$$a_3^2\Lambda_{(\mu)}[V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta)]=-(\beta^2+k_3^2)V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta). \quad (38)$$

На основі граничних рівностей (34) анулюються позаінтегральні доданки в точках $r=0$ та $r=\infty$.

Якщо умови спряження неоднорідні, то базова тотожність (4) для $g(r)\in G$ та $V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(r,\beta)\in G$ набуває вигляду:

$$\Big(\frac{dg_k}{dr}V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);k}-g_k\frac{dV^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);k}}{dr}\Big)\Big|_{r=R_k}=$$

$$\frac{c_{2k}}{c_{1k}}\Big(\frac{dg_{k+1}}{dr}V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);k+1}-g_{k+1}\frac{dV^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);k+1}}{dr}\Big)\Big|_{r=R_k}+$$
$$+\frac{1}{c_{1k}}(Z^{(\mu),k}_{\nu,(\alpha);12}(\beta)\omega_{2k}-Z^{(\mu),k}_{\nu,(\alpha);22}(\beta)\omega_{1k}),k=1,2. \qquad (39)$$

На підставі базової тотожності (39) при $k=1,2$ послідовно маємо:

$$a_1^2\sigma_1R_1^{2\alpha_1+1}\Big(\frac{dg_1}{dr}V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}-g_1\frac{dV^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}}{dr}\Big)\Big|_{r=R_1}-a_2^2\sigma_2R_1^{2\alpha_1+1}\Big(\frac{dg_2}{dr}V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}-$$
$$-g_2\frac{dV^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}}{dr}\Big)\Big|_{r=R_1}=\Big(a_1^2\sigma_1R_1^{2\alpha_1+1}\frac{c_{21}}{c_{11}}-a_2^2\sigma_2R_1^{2\alpha_1+1}\Big)\Big(\frac{dg_2}{dr}V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}-$$
$$-g_2\frac{dV^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}}{dr}\Big)\Big|_{r=R_1}+a_1^2\sigma_1R_1^{2\alpha_1+1}\frac{1}{c_{11}}(Z^{(\mu),1}_{\nu,(\alpha);12}(\beta)\omega_{21}-Z^{(\mu),1}_{\nu,(\alpha);22}(\beta)\omega_{11})=$$
$$=h_1(Z^{(\mu),1}_{\nu,(\alpha);12}(\beta)\omega_{21}-Z^{(\mu),1}_{\nu,(\alpha);22}(\beta)\omega_{11}); \qquad (40)$$

$$a_2^2\sigma_2R_2^{2\alpha_2+1}\Big(\frac{dg_2}{dr}V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}-g_2\frac{dV^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}}{dr}\Big)\Big|_{r=R_2}-a_3^2\sigma_2\operatorname{sh}R_2\Big(\frac{dg_3}{dr}V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}-$$
$$-g_3\frac{dV^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}}{dr}\Big)\Big|_{r=R_2}=\Big(a_2^2\sigma_2R_2^{2\alpha_2+1}-a_3^2\sigma_3\operatorname{sh}R_2\Big)\Big(\frac{dg_3}{dr}V^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}-$$
$$-g_3\frac{dV^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}}{dr}\Big)\Big|_{r=R_2}+a_2^2\sigma_2R_2^{2\alpha_2+1}\frac{1}{c_{12}}(Z^{(\mu),2}_{\nu,(\alpha);12}(\beta)\omega_{22}-Z^{(\mu),2}_{\nu,(\alpha);22}(\beta)\omega_{12})=$$
$$=h_2(Z^{(\mu),2}_{\nu,(\alpha);12}(\beta)\omega_{22}-Z^{(\mu),2}_{\nu,(\alpha);22}(\beta)\omega_{12}). \qquad (41)$$

Ми прийняли до уваги, що згідно з вибором σ_1, σ_2, σ_2

$$a_1^2\sigma_1R_1^{2\alpha_1+1}\frac{c_{21}}{c_{11}}-a_2^2\sigma_2R_1^{2\alpha_2+1}=a_1^2R_1^{2\alpha_1+1}\frac{c_{21}}{c_{11}}\frac{c_{11}}{c_{21}}\frac{c_{12}}{c_{22}}\frac{R_1^{2\alpha_2+1}}{R_1^{2\alpha_1+1}}\frac{\operatorname{sh}R_2}{R_2^{2\alpha_2+1}}\frac{1}{a_1^2}-$$
$$-a_2^2R_1^{2\alpha_2+1}\frac{c_{12}}{c_{22}}\frac{\operatorname{sh}R_2}{R_2^{2\alpha_2+1}}\frac{1}{a_2^2}=\frac{c_{12}}{c_{22}}\frac{R_1^{2\alpha_2+1}}{R_2^{2\alpha_2+1}}\operatorname{sh}R_2-\frac{c_{12}}{c_{22}}\frac{R_1^{2\alpha_2+1}}{R_2^{2\alpha_2+1}}\operatorname{sh}R_2=0,$$
$$a_2^2\sigma_2R_2^{2\alpha_2+1}\frac{c_{22}}{c_{12}}-a_3^2\sigma_3\operatorname{sh}R_2=a_2^2R_2^{2\alpha_2+1}\frac{c_{22}}{c_{12}}\frac{c_{12}}{c_{22}}\frac{\operatorname{sh}R_2}{R_2^{2\alpha_2+1}}\frac{1}{a_2^2}-\operatorname{sh}R_2=0.$$

Внаслідок рівностей (38), (40) та (41) маємо:

$$H^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}[\mathcal{M}^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}[g(r)]]=\sum_{k=1}^{2}h_k[Z^{(\mu),k}_{\nu,(\alpha);12}(\beta)\omega_{2k}-Z^{(\mu),k}_{\nu,(\alpha);22}(\beta)\omega_{1k}]-$$

$$
-\Big[\int\limits_0^{R_1}(\beta^2+k_1^2)g_1(r)V_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)}(r,\beta)\sigma_1 r^{2\alpha_1+1}dr+
$$

$$
+\int\limits_{R_1}^{R_2}(\beta^2+k_2^2)g_2(r)V_{\nu,(\alpha);2}^{(\mu)}(r,\beta)\sigma_2 r^{2\alpha_2-1}dr+
$$

$$
+\int\limits_{R_2}^{\infty}(\beta^2+k_3^2)g_3(r)V_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta)\sigma_3\operatorname{sh} r dr\Big]. \tag{42}
$$

Після роз'єднання в (42) інтегралів на суму двох інтегралів приходимо до тотожності (36).

Застосування запровадженого гібридного інтегрального перетворення подамо в іншій роботі.

[1] Ленюк М.П. Исследование основных краевых задач для диссипативного волнового уравнения Бесселя. – Киев, 1983. – 62 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.3).

[2] Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1959. – 468 с.

[3] Конет І.М., Ленюк М.П. Інтегральні перетворення типу Мелера-Фока. – Чернівці: Прут, 2002. – 248 с.

[4] Ленюк М.П., Шинкарик М.І. Гібридні інтегральні перетворення (Фур'є, Бесселя, Лежандра). Частина 1. – Тернопіль: Економічна думка, 2004. – 368 с.

[5] Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. – 1108 с.

[6] Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3-х т. – М.: Наука, 1969. – Т. 3. – 656 с.

INTRODUCTION OF HYBRID INTEGRAL TRANSFORMATION OF BESSEL-EULER-LEGENDRE TYPE ON THE POLAR AXIS

Mykhaylo LENYUK, Oleg LENYUK

Yuriy Fed'kovych Chernivtsi National University,
2 Kotsjubynskyi Str., Chernivtsi 58012, Ukraine